

# **ВЕСТНИК ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2, 2016

Биология. Химия. Физика. Математика

Научный журнал

Издается с 2000 года

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-60994 от 5 марта 2015 г.

Учредитель ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»

## **РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:**

- В. Н. Егоров**, д-р экон. наук  
(*председатель*)
- С. А. Сырбу**, д-р хим. наук  
(*зам. председателя*)
- В. И. Назаров**, д-р психол. наук  
(*зам. председателя*)
- К. Я. Авербух**, д-р филол. наук (Москва)
- Ю. М. Воронов**, д-р полит. наук
- Н. В. Усольцева**, д-р хим. наук
- Ю. М. Резник**, д-р филос. наук (Москва)
- О. А. Хасбулатова**, д-р ист. наук
- Л. В. Михеева**  
(*ответственный секретарь*)

## **РЕДКОЛЛЕГИЯ СЕРИИ «ЕСТЕСТВЕННЫЕ, ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ»:**

- Б. Я. Солон**, д-р физ.-мат. наук  
(*главный редактор серии*)
- В. И. Назаров**, д-р психол. наук
- Т. А. Воронова**, канд. пед. наук
- М. В. Клюев**, д-р хим. наук
- В. А. Исаяев**, д-р биол. наук
- Д. И. Молдаванский**, д-р физ.-мат. наук
- Е. В. Соколов**, канд. физ.-мат. наук
- В. А. Годлевский**, д-р техн. наук
- Л. И. Минеев**, канд. техн. наук
- О. В. Кузьмина**, канд. юрид. наук
- Д. В. Кареев**, канд. ист. наук

## **Адрес редакции (издательства):**

153025 Иваново, ул. Ермака, 39, к. 462  
тел./факс: (4932) 93-43-41  
e-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Подписной индекс в каталоге  
«Пресса России» 41512

Электронная копия журнала размещена  
на сайтах [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru),  
[www.ivanovo.ac.ru](http://www.ivanovo.ac.ru)

© ФГБОУ ВО «Ивановский  
государственный университет», 2016

# IVANOVO STATE UNIVERSITY BULLETIN

---

Series «Natural, Social Sciences»

---

Issue 2, 2016

Biology. Chemistry. Physics. Mathematics

Scientific journal

Issued since 2000

---

The journal is registered in the Federal Agency for the Oversight in the Sphere of Communication, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor)  
Registration certificate III № ФС77-60993 of March 5, 2015

---

Founded by Ivanovo State University

---

## EDITORIAL COUNCIL:

- V. N. Egorov*, Doctor of Economics  
(*Chairman*)
- S. A. Syrbu*, Doctor of Chemistry  
(*Vice-Chairman*)
- V. I. Nazarov*, Doctor of Psychology  
(*Vice-Chairman*)
- K. Ya. Averbuch*, Doctor of Philology  
(Moscow)
- Yu. M. Voronov*, Doctor of Politics
- N. V. Usoltseva*, Doctor of Chemistry
- Yu. M. Reznik*, Doctor of Philosophy  
(Moscow)
- O. A. Khasbulatova*, Doctor of History
- L. V. Mikheeva* (*Secretary-in-Chief*)

## EDITORIAL BOARD OF THE SERIES

«NATURAL, SOCIAL SCIENCES»:

- B. Ya. Solon*, Doctor of Physics  
and Mathematics  
(*Chief Editor of the Series*)
- V. I. Nazarov*, Doctor of Psychology
- T. A. Voronova*, Candidate of Science
- M. V. Klyuev*, Doctor of Chemistry
- V. A. Isaev*, Doctor of Biology
- D. I. Moldavansky*, Doctor of Physics  
and Mathematics
- E. V. Sokolov*, Candidate of Science,  
Physics and Mathematics
- V. A. Godlevsky*, Doctor of Technical Science
- L. I. Mineev*, Candidate of Technical Science
- O. V. Kuzmina*, Candidate of Science, Law
- D. V. Kareev*, Candidate of Science, History

## Address of the editorial office:

153025, Ivanovo, Ermak str., 39, office 462  
tel./fax: (4932) 93-43-41  
e-mail: [publisher@ivanovo.ac.ru](mailto:publisher@ivanovo.ac.ru)

Index of subscription  
in the catalogue «Russian Press» 41512  
Electronic copy of the journal can be found  
on the web-sites [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru),  
[www.ivanovo.ac.ru](http://www.ivanovo.ac.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

---

---

### Биология

<b>Борисова Е. А.</b> Дендрофлора города Кинешмы Ивановской области .....	5
<b>Борисова И. Н., Чекан И. В.</b> Коллекция плодово-ягодных культур открытого грунта в ботаническом саду ИвГУ .....	10
<b>Зарипов В. Н., Барина М. О., Королева С. В.</b> Прогностическое значение вегетативного статуса в развитии мелкоточечного кератолиза у курсантов-спасателей .....	15
<b>Исаев В. А., Альджабали А. М. М.</b> Экологическое моделирование современной ситуации по потенциальному распространению малярии в некоторых регионах России .....	20
<b>Кормилицына Н. К.</b> Показатели вариабельности сердечного ритма и психофизиологические особенности студентов .....	26
<b>Курючкин В. А., Рудакова Е. В.</b> Клеточные элементы гемолимфы некоторых видов синантропных мух и шмелей, характеристика гемоцитарной формулы .....	32
<b>Минеева Л. Ю., Фомина О. Е.</b> Ржавчинные грибы на лекарственных растениях территории ботанического сада и дендрария ИвГУ .....	42
Первый доктор биологических наук. Памяти Н. А. Шобанова (1958—2015) .....	46

### Химия

<b>Калмыков П. А., Ключев М. В.</b> Синтез и исследование катализаторов гидродегалогенирования на основе палладия и наноалмазов .....	49
<b>Крылов Е. Н., Логинова М. В.</b> Гидролиз замещенных ацетанилидов как функция параметров молекул и реакционного центра .....	56
<b>Крылов Е. Н.</b> Молекулярный электростатический потенциал как дескриптор реакционной способности арилсульфонилгалогенидов .....	61

### Математика

<b>Кусковский Л. Н.</b> Об одном виде гиперкомплексных функций, моногенных по нескольким функциям в пространстве $C^n$ .....	71
<b>Логинов Е. К., Логинов Д. Е., Шерудилло А. С.</b> О выборе перенормировки массы Хиггса в стандартной модели .....	80
<b>Молдаванский Д. И., Пелевина К. С.</b> О финитной отделимости подгрупп обобщенных свободных произведений групп .....	84
<b>Соколов Е. В.</b> О применении метода Д. И. Молдаванского к исследованию аппроксимируемости HNN-расширений корневыми классами групп .....	87
<b>Солон Б. Я.</b> Функциональные $pm$ -степени .....	104
<b>Хашин С. И.</b> Оптимизация базиса Фурье в компьютерной графике .....	111
<i>Сведения об авторах</i> .....	116
<i>Информация для авторов</i> <i>«Вестника Ивановского государственного университета»</i> .....	119

CONTENTS

**Biology**

<b>Borisova E. A.</b> Dendroflora of the town Kinechma (Ivanovo region) .....	5
<b>Boricova I. N., Chekan I. V.</b> Collection of fruit and Berry cultures of open ground in the Botanic Garden of the University .....	10
<b>Zaripov V. N., Barinova M. O., Koroleva C. V.</b> Prognostical value of vegetative status in development of pitted keratolysis in cadets-rescuers .....	15
<b>Isaev V. A., Aljabali A. M. M.</b> Ecological modeling of the current situation on the potential spread of malaria in some regions of Russia .....	20
<b>Kormilitsyna N. K.</b> Indices of heart rate variability and psychophysiological features of students .....	26
<b>Kuryuchkin V. A., Rudakova E. V.</b> Cellular elements of hemolymph of some species of synantropic flies and bumblebees, the characteristic gemosideros formula .....	32
<b>Mineeva L. Y., Fomina O. E.</b> Rust fungi on medicinal plants in the Botanical garden and arboretum of Ivanovo State University .....	42
Memory N. A. Shobanov. First Sc. D. ....	46

**Chemistry**

<b>Kalmykov P. A., Klyuev M. V.</b> A synthesis and study of hydrodehalogenation catalyst based on palladium and nanodiamonds .....	49
<b>Krylov E. N., Loginova M. V.</b> Hydrolysis of substituted acetanilides as a function of molecular and reaction centre characteristics .....	56
<b>Krylov E. N.</b> Molecular electrostatic potential as a descriptor of aryl sulphonyl halides reaction ability .....	61

**Mathematics**

<b>Kuskovsky L. N.</b> About one form of Hypercomplex functions, monogenic on several functions in $C^n$ .....	71
<b>Loginov E. K., Loginov D. E., Sherudillo A. S.</b> The choice of the Higgs mass renormalization in the standard model .....	80
<b>Moldavanskii D. I., Pelevina K. S.</b> On the finitely separability of subgroups of generalized free products .....	84
<b>Sokolov E. V.</b> On the application of D. I. Moldavanskii's method to the study of the approximability of HNN-extensions by root classes of groups .....	87
<b>Solon B. Ya.</b> The function pm-degrees.....	104
<b>Khashin S. I.</b> Optimization of the Fourier basis in the computer graphics .....	111
<i>Information about the authors</i> .....	116
<i>Information for the authors of «Ivanovo State University Bulletin»</i> .....	119

УДК 581.9 (470.315)

*Е. А. Борисова*

## ДЕНДРОФЛОРА ГОРОДА КИНЕШМЫ ИВАНОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Приводятся данные о составе дендрофлоры города Кинешма. К 2016 г. отмечено 123 вида древесных растений, относящихся к 2 отделам, 2 классам, 25 семействам, 58 родам. Кратко охарактеризованы особенности систематической, биоморфологической и флорогенетической структур дендрофлоры. Приводятся примеры широко распространенных видов, составляющих основу зеленых насаждений города, сведения о редких интродуцированных древесных растениях. Обсуждаются вопросы натурализации декоративных деревьев и кустарников, проблемы расселения инвазионных видов.

**Ключевые слова:** дендрофлора, интродуцированные древесные растения, натурализация растений, инвазионные виды, редкие древесные растения, город Кинешма, Ивановская область.

Data about composition dendroflora of the town Kineshma are given. The present flora comprise of 123 vascular plant species belong of 2 classis, 25 families and 58 genera. Main features of the taxonomic, biomorphological and florogenetic structure Kineshma dendroflora are briefly characterized. Information of widespread woody plants and some rare introduced trees and shrubs are presented. Naturalization of alien woody plant and problems of invasive species distribution are discussed.

**Key words:** dendroflora (arboreal flora), alien woody species, rare introduced tree and shrub, plat naturalization, invasive plant species, town Kineshma, Ivanovo region.

Древесные растения в городах формируют основу растительного покрова, выполняют важнейшие экологические функции и создают комфортную среду для населения. Поэтому состояние зеленых насаждений городов и проблемы оптимизации городской среды продолжают оставаться приоритетными направлениями ботанико-экологических исследований. Изучение видового состава дендрофлоры городов проводятся во многих городах России [9, 11, 12 и др.] и за рубежом [13, 14, 15, 16, 17 и др.].

Город Кинешма — крупный промышленный и транспортный центр, второй по величине и экономическому значению город Ивановской области. Он расположен в 90 км севернее г. Иванова, на высоких пологих холмах правого берега р. Волги. Согласно данным областного статистического управления, площадь города составляет 48,9 км<sup>2</sup>; численность населения — 85,3 тыс. человек.

Территория города отличается сложным и пересеченным рельефом, здесь протекают 4 реки — притоки Волги (Кахоза, Кинешемка, Черная и Томка), расположены 3 крупных оврага с ручьями (Алексеевский, Вандышевский и Пестовский), сохранились участки лесов, заросли кустарников.

---

© Борисова Е. А., 2016

Кинешма по праву считается одним из самых зеленых и живописных городов Ивановской области. Площадь зеленых насаждений общего пользования города составляет 330 га. В Кинешме действуют 9 парков, 2 бульвара, 8 скверов, 6 лесных массивов. 13 объектов озеленения имеют статус особо охраняемой природной территории (ООПТ) — памятника природы.

С конца 1980-х гг. исследования флоры и растительности в черте г. Кинешмы проводились периодически студентами и сотрудниками Ивановского университета. К 1998 г. во флоре города было выявлено 689 видов сосудистых растений [6]. Специальное изучение дендрофлоры города проводилось в 2009—2011 гг., в 2015 г. в рамках программы по ведению Красной книги Ивановской области были обследованы ООПТ города и составлялись флористические списки с указанием для каждого вида жизненного состояния, встречаемости, фенологической фазы. Особое внимание обращалось на декоративные качества и наличие различных повреждений древесных растений.

В результате исследований и обобщения имеющихся данных в составе дендрофлоры г. Кинешмы к 2016 г. было выявлено 123 вида сосудистых растений (без учета форм и сортового разнообразия), относящихся к 2 отделам, 2 классам, 25 семействам и 58 родам. Систематическая структура дендрофлоры города характеризуется явным преобладанием представителей отдела покрытосеменные (*Angiospermae*, *Magnoliophyta*), который включает 111 видов. В отделе голосеменных (*Gymnospermae*, *Pinophyta*) насчитывается 12 видов. Крупными семействами дендрофлоры являются *Rosaceae* (42 вида) и *Salicaceae* (20 видов). Крупные роды следующие: *Salix* — 12 видов, *Populus* — 8 видов, *Crataegus* и *Rosa* — по 6 видов, *Spirea* — 5 видов, *Acer* — 4 вида.

В биоморфологической структуре дендрофлоры города доминируют деревья (68 видов), составляющие более половины всего видового состава (55,2 %). Кустарники представлены 49 видами, полукустарники и древесные лианы — 3 видами. Распределение древесных растений г. Кинешмы по жизненным формам представлено в табл. 1.

Таблица 1

## Жизненные формы дендрофлоры г. Кинешмы

Название жизненной формы	Число видов	% от общего числа видов
Деревья	68	55,2
вечнозеленые	9	7,3
листопадные	57	46,3
Кустарники	49	39,8
вечнозеленые	3	2,4
листопадные	46	37,4
Полукустарники	3	2,4
Лианы	3	2,4

В современной дендрофлоре г. Кинешмы, как и в других городах России [9, 11, 12] и Восточной Европы [13, 15, 17], доминируют интродуцированные виды. Общее их число в Кинешме составляет 64,2 % от общего числа.

Местная флора представлена 44 видами. Среди них часто встречаются лиственные деревья — *Acer platanoides*, *Betula pendula*, *Salix caprea*, *Tilia cordata*,

*Sorbus aucuparia*. Аллеи, рядовые и групповые посадки этих пород составляют основу зеленых насаждений города. По склонам оврагов и берегам рек небольшие заросли формируют *Alnus glutinosa*, *A. cinerea*, *Populus tremula*, *S. triandra*, единично встречаются *Padus avium*, *Salix pentandra*, *S. mirsinifolia*. В городе сохранились участки сосновых лесов, однако общее состояние сосен в них неудовлетворительное, многие деревья суховершинные, с ассиметричной кроной и различными повреждениями стволов, оголением корней. Естественное возобновление сосны обыкновенной практически отсутствует даже в крупных лесных массивах. Деревья ели европейской (*Picea abies*) в городе также находятся в угнетенном состоянии. Участки лиственных лесов представлены березняками, дубовой рощей на южной окраине города. Вязы — *Ulnus laevis*, *U. glabra* встречаются одиночно и небольшими группами.

Среди редких растений флоры Ивановской области в городе отмечены 2 вида (*Abies sibirica*, *Cornus alba*), включенные в региональную Красную книгу [10], а также редкие виды (*Juniperus communis*, *Daphne mezereum*, *Salix philicifolia*, *S. dasyclados*), которые единично отмечены в парках города.

Интродуцированные древесные виды разнообразны по происхождению. Флорогенетическая структура их показана в таблице 2. Широко представлены в озеленении города виды североамериканского и восточноазиатского происхождения. Среди североамериканских видов в городе часто встречаются *Acer negundo*, *Amelanchier spicata*, *Fraxinus pennsylvanica*, *Padus virginiana*, *Populus deltoides*, *Crataegus submollis*, *Physocarpus opulifolius*, *Symphoricarpos albus*. Большинство североамериканских видов декоративны, устойчивы к неблагоприятным городским условиям, успешно натурализовались в Верхневолжском регионе [3, 4].

Таблица 2

## Флорогенетическая структура дендрофлоры г. Кинешмы

№	Флорогенетический элемент	Число видов	% от общего числа видов
1	Североамериканские	22	17,8
2	Восточноазиатские	19	15,4
3	Сибирские	10	8,1
4	Южноевропейские	9	7,5
5	Западноевропейские	9	7,5
6	Ирано-туранские	6	4,9
7	Кавказские	4	3,3
Всего		79	64,2

Среди распространенных видов восточноазиатского происхождения в скверах и у жилых домов в городе часто встречаются *Acer ginnala*, *Rosa rugosa*, *Padus maakii*, *Mallus baccata*, *M. prunifolia*, *Spirea japonica* и др.

Среди видов сибирского происхождения в озеленении г. Кинешмы распространены *Caragana arborescens*, *Cotoneaster lucidus*, *Spirea chamaedrifolia*, *S. media*. Менее разнообразно представлены виды западноевропейского (*Berberis vulgaris*, *Tilia platyphyllos*, *Syringa josikaea* и др.) и ирано-туранского (*Hippophae rhamnoides*, *Pyrus communis*, *Salix fragilis* и др.) происхождения.

Наиболее обычны в городском озеленении следующие интродуценты — *Acer negundo*, *Fraxinus pennsylvanica*, *Populus alba*. Кроме посадок в различных частях города эти виды формируют спонтанные разновозрастные заросли вдоль дорог, у жилых домов, на пустырях, что снижает эстетические качества зеленых насаждений. Они отмечены в природных сообществах, где конкурируют с видами местной флоры и вытесняют их. На склонах рек и оврагов данные виды образуют трудно искоренимые разновозрастные заросли.

Изредка в городе встречаются красиво цветущие кустарники, например айва японская, слива колючая, деревья яблони ягодной, а также очень декоративные и устойчивые к городским условиям североамериканские хвойные растения — туя западная и ель колючая. Многие интродуцированные виды встречаются редко. Только в частном секторе города редки посадки красиво цветущих кустарников (*Dasiphora fruticosa*, *Philadelphus pubescens*, *Ph. coronarius*, *Rosa pimpinellifolia*, *Sorbaria sorbifolia*, *Syringa vulgaris*). На окраинах города найдены крупные старовозрастные деревья тополя берлинского, вечнозеленого кустарника можжевельника казацкого, единичные экземпляры сосны сибирской, ореха маньчжурского и ели Энгельмана [7].

Было отмечено, что вдоль автотранспортных магистралей, в скверах и парках г. Кинешмы редко высаживаются различные виды боярышников (*Crataegus monogina*, *Cr. Submollis*, *Cr. nigrum*), которые относятся к декоративным, устойчивым и перспективными для озеленения [2].

Исследования дендрофлоры в городе позволили обнаружить очень редкие интродуценты, которые ранее не были известны для флоры Ивановской области. Среди них *Sambucus nigra*, впервые отмеченная в 1992 г. [1, 3], *Crataegus horrida*, который был найден на крутом склоне берега Волги в зарослях ольхи серой [5] и *Spirea x pseudosalicifolia*, группы которой обнаружены на окраине г. Кинешмы, в заболоченном участке в основании склона карьера [8].

Практически все интродуцированные виды в условиях Кинешмы цветут, продуцируют семена, некоторые размножаются вегетативно. Среди них успешно натурализовались 26 видов, среди которых 12 видов относятся к инвазионным, внедрившимся в состав природных сообществ. Крупные заросли по берегам рек Волги и Казохи, а также склонам оврагов формируют *Populus alba*, *Acer negundo*. По берегам р. Кинешемки крупные густые группировки образует *Hippophae rhamnoides*, часто разводимая населением как ягодная культура. В лесопарковых зонах города встречаются выросшие самосевом *Amelanchier spicata*, *Aromia mitschurinii*, *Cerasus vulgaris*, *Cotoneaster lucidus*, *Grossularia reclinata*, *Malus domestica*, *Physocarpus opulifolius*, *Sambucus racemosa*. Дичание и спонтанное распространение этих кустарников типично для Верхневолжского региона [3, 4] и городов Восточной Европы [15, 16, 17].

Состояние редких древесных пород в городе хорошее, они сохраняют свои декоративные качества практически весь вегетационный период. Это говорит о необходимости расширения посадок этих древесных пород в городе. Также рекомендуется больше использовать для озеленения местные виды растений, например *Acer platanoides*, *Quercus robur*, *Sorbus aucuparia*, *Rosa majalis*, *Cornus alba*. Следует также высаживать в городе редкие виды лиственных пород *Populus nigra*, *Fraxinus excelsior*, которые отличаются быстрым ростом, устойчивостью к городским условиям, высокими декоративными качествами.



Таким образом, видовой состав дендрофлоры г. Кинешмы разнообразен, представлен 123 видами сосудистых растений, среди которых явно преобладают интродуцированные растения различного происхождения. К успешно натурализовавшимся относятся 26 интродуцированных видов, 12 среди которых являются инвазионными.

Для оптимизации городской среды следует регулярно проводить мероприятия по уходу за зелеными насаждениями. При формировании новых посадок предпочтение следует отдавать декоративным долговечным и устойчивым древесно-кустарниковым породам местной флоры. Среди интродуцированных пород можно рекомендовать высаживать хвойные растения (*Picea pungens*, *Thuja occidentalis*, *Juniperus sabina*), *Populus simonii*, *Salix schwerini*, виды родов *Crataegus*, *Rosa*, *Syringa*.

За состоянием редких видов деревьев и кустарников следует проводить мониторинговые наблюдения.

*Благодарности.* Автор выражает искреннюю благодарность студентке биологического отделения Н. С. Полетаевой за активное участие в полевых исследованиях дендрофлоры в 2009—2011 гг., а также помощь в определении видов р. *Rosa* ст. науч. сотруднику БИН РАН О. И. Бузуновой, видов р. *Crataegus* — вед. науч. сотруднику ГБС РАН Ю. Е. Беляевой.

#### Библиографический список

1. Борисова Е. А. Дополнение к адекватной флоре Ивановской области // Бюллетень Московского общества испытателей природы. Отдел биологический. 1993. Т. 98, вып. 6. С. 114—117.
2. Борисова Е. А. Род боярышник (*Crataegus* L., Rosaceae) в г. Иванове // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. Вып. 3. Иваново, 2004. С. 18—24.
3. Борисова Е. А. Адвентивная флора Ивановской области. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2007. 188 с.
4. Борисова Е. А. Инвазии древесных растений в природные сообщества Верхневолжского региона // Российский журнал биологических инвазий. 2016. № 1. С. 24—30. URL: [http://www/sevin.ru/invasjour/issues/2010\\_4.html](http://www/sevin.ru/invasjour/issues/2010_4.html) (дата обращения: 26.03.2016).
5. Борисова Е. А., Голубева М. А. Сведения о новых заносных и дичающих видах в Ивановской Костромской областях // Флористические исследования в Центральной России на рубеже веков. М.: Изд-во Бот. сада МГУ, 2001. С. 28—31.
6. Борисова Е. А., Кочин М. Ю., Шилов М. П. Флора г. Кинешмы, ее динамика и антропогенная трансформация // Биологические ресурсы, их состояние и использование в бассейне Верхней Волги / под ред. В. П. Семерного. Ярославль: Ярослав. гос. ун-т, 1999. С. 68—72.
7. Борисова Е. А., Полетаева Н. С. Редкие виды древесных растений в г. Кинешма // Историко-культурный и природный потенциал кинешемского края: материалы IX и X региональных краеведческих конференций. Кинешма, 2014. С. 246—250.
8. Борисова Е. А., Сенишкина И. В. Флористические находки в Ивановской области // Бюллетень Московского общества испытателей природы. Отдел биологический. 2007. Т. 112, вып. 6. С. 41—42.
9. Мангалова Н. А., Овеснова С. А. Таксономическая структура дендрофлоры г. Перми // Вестник Удмуртского университета. 2011. Вып. 3. С. 147—151.
10. Красная книга Ивановской области. Т. 2: Растения и грибы / Е. А. Борисова, М. А. Голубева, М. П. Шилов и др.; под ред. В. А. Исаева. Иваново, 2010. 192 с.
11. Соколова И. Г. Деревья и кустарники г. Пскова // Ботанический журнал. 2003. № 11. С. 80—89.

12. Старченко В. М., Тимченко Н. А. Дендрофлора г. Благовещенска // Известия Иркутского государственного университета. 2011. Т. 4, № 2 (10). С. 89—93.
13. Browicz K. Woody flora of Hydra (Agrosaronic Islands, Greece) // Dendrobiology. 2001. Vol. 46. P. 9—12.
14. Ergaschewa G. N., Saibov N. S., Drauschke W. Dendrological analysis of the parks of Dushanbe // Journal of Agriculture and Rural Development in the Tropics and Subtropics. 2004. Vol. 105, № 1. P. 83—92.
15. Klimko M., Kaczmarek G. Dendroflora of the town Jarocin // Roczniki Akademii Rolniczej w Poznaniu. 2006. Bot.-Stec. 10. P. 121—136.
16. Lubiarz M., Kulesza P. Dendroflora of the «Wschod» estate in Swidnik (Lublin Voivodeship) — nature and landscape analysis // Acta Sci. Pol. 2015. Vol. 14 (3). P. 85—92.
17. Nowak G., Nowakowska M. Dendroflora of Gryfino // Folia Pomer. Univ. Technol. Stetin., Agric., Aliment., Pisc., Zootech. 2015. Vol. 316 (33), № 1. P. 95—106.

УДК 58.081 (470.315)

*И. Н. Борисова, И. В. Чекан*

### КОЛЛЕКЦИЯ ПЛОДОВО-ЯГОДНЫХ КУЛЬТУР ОТКРЫТОГО ГРУНТА В БОТАНИЧЕСКОМ САДУ ИВГУ

Приведены данные о содержании коллекции плодово-ягодных культур открытого грунта в ботаническом саду ИвГУ.

**Ключевые слова:** ботанический сад, коллекция плодово-ягодных культур, открытый грунт.

Lists information about the contents of the collection of fruit and Berry cultures of open ground in the Botanic Garden of the University.

**Key words:** Botanical Garden, a collection of fruit and Berry cultures, open ground.

Экспозиционно-коллекционный участок «Плодово-ягодный сад» площадью более 800 кв. м. расположен в северной части ботанического сада ИвГУ. Он состоит из отдела семечковых (460 кв. м) и косточковых (350 кв. м) культур. Плодово-ягодный сад семечковых культур заложен в 2011 г. в ходе выполнения дипломной работы Ю. В. Маракушиной. В 2012 г. по проекту Ф. В. Шперлинг освоен новый участок площадью 350 кв. м и организован отдел косточковых плодовых культур. Посадочный материал в виде однолетних саженцев был приобретен в Мичуринском саду ТСХА г. Москва, научно-производственном объединении «Сады России», г. Челябинск, Центральном ботаническом саду НАН Белоруссии, г. Минск, ТЦ в г. Иванове. Согласно проектам, на участках высажены как традиционные, так и малораспространенные, редкие растения, например *Cornus mas* L., *Elaeagnus multiflora*, *Armeniaca mandshurica* (2 сорта), *Prunus divaricata* 'Подарок Санкт-Петербургу', *Lonicera kamtschatica* 'Амфора', 'Бажовская', 'Нимфа', 'Фианит', *Rubus caesius* 'Black satin' и другие.

Основное направление исследований — адаптация растений к биотическим и абиотическим факторам среды, сортоиспытание, разработка и апробация

---

© Борисова И. Н., Чекан И. В., 2016

• Серия «Естественные, общественные науки»

агротехники плодово-ягодных культур. Основное целевое назначение отдела направлено на сохранение генетического потенциала, выявление, отбор и пополнение коллекции высокопродуктивными, зимостойкими, декоративными видами и сортами плодово-ягодных культур.

Согласно инвентаризации 01.12.2014 г., коллекция плодово-ягодных растений ботанического сада ИвГУ насчитывала 120 видов, форм и сортов высших растений (62 вида), принадлежащих к 32 родам, 13 семействам.

Наибольшим числом видов, форм и сортов представлены семейства *Rosaceae* (36 видов); *Grossulariaceae* (6 видов); *Vacciniaceae* (4 вида); *Actinidiaceae* (2 вида); *Berberidaceae* (2 вида); *Caprifoliaceae* (2 вида); *Juglandaceae* (2 вида); *Betulaceae* (3 вида); семейства *Schisandraceae*, *Cornaceae*, *Vitaceae*, *Elaeagnaceae*, *Pinaceae* представлены по 1 виду.

В настоящее время, согласно инвентаризации 01.12.15 г., коллекция плодово-ягодных культур ботанического сада ИвГУ насчитывает 130 видов, форм и сортов высших растений (63 вида), принадлежащих к 31 роду, 12 семействам. Как и ранее, наиболее распространенным семейством является *Rosaceae* (37 видов). Остальные семейства представлены менее обширно.

Систематический состав коллекции плодово-ягодных растений открытого грунта приведен в таблице.

**Систематический состав коллекции плодово-ягодных растений открытого грунта в ботаническом саду ИвГУ по данным инвентаризации 2014—2015 гг.**

Семейство	Количество родов		Количество видов, форм		Количество сортов		Всего видов, сортов	
	2014	2015	2014	2015	2014	2015	2014	2015
1. <i>Actinidiaceae</i>	1	1	2	2	2	2	4	4
2. <i>Berberidaceae</i>	2	2	2	2	—	—	2	2
3. <i>Elaeagnaceae</i>	1	—	1	—	—	—	1	—
4. <i>Grossulariaceae</i>	2	2	6	6	22	24	24	26
5. <i>Rosaceae</i>	14	15	36	37	40	46	62	68
6. <i>Vacciniaceae</i>	4	4	4	4	11	10	13	12
7. <i>Cornaceae</i>	1	1	1	1	—	—	1	1
8. <i>Vitaceae</i>	1	1	1	1	—	—	1	1
9. <i>Caprifoliaceae</i>	2	2	2	2	4	7	5	8
10. <i>Schisandraceae</i>	1	1	1	1	—	—	1	1
11. <i>Pinaceae</i>	1	1	1	1	—	—	1	1
12. <i>Betulaceae</i>	1	1	3	3	1	1	3	3
13. <i>Juglandaceae</i>	1	1	2	3	—	—	2	3
Всего	32	31	62	63	85	84	120	130

За 2015 г. в коллекцию поступило 11 видов и сортов, принадлежащих к 3 семействам: *Ribes rubrum* L. (1 сорт), *Ribes roseum* L. (1 сорт), *Prunus avium* L. (1 сорт), *Pyrus communis* L. (4 сорта), *Malus domestica* Borkh. (1 сорт), *Lonicera xylosteium* L. (2 сорта), *Viburnum opulus* L. (1 сорт).

Третий сезон проходит сортоиспытание смородины. По результатам наблюдений крупноплодными зарекомендовали себя следующие сорта *Ribes nigrum* L.: 'Ленинградский великан' и 'Вологда'; среднеплодными — 'Загадка' и 'Нежданчик'. Мелкоплодным, неустойчивым к вредителям и болезням в наших условиях оказался сорт 'Экзотика'. По вкусовым качествам наиболее сладкими ягодами отличаются сорта смородины 'Добрыня' и 'Велой'; кисло-сладкий вкус у сорта 'Загадка'; сладко-кислый у 'Вологды'; кислые ягоды у сортов 'Экзотика' и 'Фаворит'. Можно отметить, что все сорта зарекомендовали себя как зимостойкие. С целью размножения проводятся опыты по черенкованию маточных растений.

Вид *Rubus idaeus* L. представлен в коллекции 12 сортами. Среди них 3 сорта являются ремонтантными, один — желтоплодным. Высокими вкусовыми качествами и крупными плодами выделяются сорта 'Бальзам', 'Бригантина', 'Скромница'. Из ремонтантных сортов крупноплодным является сорт 'Геракл', но по вкусовым качествам он уступает сорту 'Рубиновое ожерелье'.

Можно сделать некоторые выводы по результатам первой зимовки (после посадки) *Vaccinium corymbosum* L. Выявлено, что из восьми сортов выпал один из трех образцов сорта 'Reka' и сорт 'Blucrop'. Таким образом, коллекция сократилась на один сорт. В течение вегетационного периода повреждения растений болезнями и вредителями не выявлены. Отмечена положительная динамика роста. Планируется продолжить наблюдения за сортами голубики высокорослой.

Низкая зимостойкость отмечена у *Elaeagnus multiflora* Thunb. Частичное подмерзание побегов наблюдалось в предыдущие зимы. Два экземпляра 2011 г. посадки погибли в период зимовки с 2014 на 2015 г.

#### Список плодово-ягодных растений открытого грунта на декабрь 2015 г.

##### Сем. *Actinidiaceae*

1. *Actinidia kolomikta* (Maxim.) Maxim.
2. *Actinidia arguta* (Sieb. et Zucc.) Planch ex Miq.,  
*Actinidia arguta* 'Jumbo', *Actinidia arguta* 'Ken's Red'.

##### Сем. *Berberidaceae*

3. *Berberis vulgaris* L.  
*Podophyllum peltatum* L.

##### Сем. *Betulaceae*

4. *Corylus avellana* L.  
*Corylus avellana* 'Тамбовский Ранний'.
5. *Corylus sieboldiana* Blume.

##### Сем. *Cornaceae*

6. *Cornus mas* L.

Сем. *Caprifoliaceae*

7. *Lonicera kamtschatica* 'Амфора', 'Бажовская', 'Нимфа', 'Фианит'.
8. *Lonicera xylosteium* P-37, P-23.
9. *Viburnum opulus* L.  
*Viburnum opulus* 'Щукинская'.

Сем. *Grossulariaceae*

10. *Grossularia reclinata* 'Грушенька', 'Салют', 'Славянский', 'Финик'.
11. *Ribes alpinum* L.
12. *Ribes niveum* 'Версальская', 'Смоляниновская', 'Уральская белая'.
13. *Ribes aureum* Pursh.
14. *Ribes rubrum* 'Мармеладница', 'Ненаглядная', 'Сахарная', 'Роза Чайер', 'Винная красная', 'Голландская', 'Мускат розовый', 'Розовый жемчуг', 'Ранняя сладкая', 'Белочка'.
15. *Ribes nigrum* 'Велой', 'Фаворит', 'Нежданчик', 'Экзотика', 'Добрыня', 'Загадка', 'Вологда', 'Ленинградский великан', 'Надина'.

Сем. *Juglandaceae*

16. *Juglans mandshurica* Maxim.
17. *Juglans regia* L.
18. *Juglans cinerea* L.

Сем. *Pinaceae*

19. *Pinus sibirica* Du Tour.

Сем. *Rosaceae*

20. *Cydonia oblonga* Mill.
21. *Chaenomeles Japonica* (Thunb.) Lindl.ex Spach (Ch.maulei (Mast.) Lavall.) X *superba* (Frahm) Rehder 'Cameo', 'Елли Мюссел', 'Эрнест'.
22. *Chaenomeles Japonica* (Thunb.) Lindl.ex Spach (Ch.maulei (Mast.) Lavall.) X *speciosa* (Sweet) Nakai 'Rubra', 'Юкиготен'.
23. *Aronia melanocarpa* (Michx.) Elliot.
24. *Crataegus aestivalis* 'Людмил'.
25. *Crataegus sanguineus* Pallas.
26. *Cerasus tomentosa* Thunb.
27. *Cerasus fruticosa* (Pall.) G.Woron.
28. *Cerasus vulgaris* 'Загорьевская'.
29. *Pyrus communis* 'Лада', 'Кафедральная', 'Осенняя Яковлева', 'Памяти Яковлева', 'Просто Мария', 'Чижевская', 'Январская'.
30. *Pyrus ussuriensis* Maxim. — var. *pygaster* L.
31. *Rubus caesius* 'Black satin'.
32. *Fragaria vesca* L.
33. *Fragaria magna* 'Амулет', 'Зенга-Зенгана', 'Билли Рубин', 'Елизавета', 'Негритенок'.
34. *Rubus saxatilis* L.

35. *Rubus idaeus* 'Бальзам', 'Бригантина', 'Вольница', 'Геракл', 'Нежность', 'Пересвет', 'Рубиновое ожерелье', 'Сенатор', 'Скромница', 'Солнышко' + 2 sp. 2013 г. — желтоплодная и красноплодная).
36. *Sorbus aucuparia* L.  
*Sorbus aucuparia* 'Алая Крупная', 'Гранатная', 'Ликерная', 'Невеженская желтая'.
37. *Prunus domestica* L.
38. *Prunus spinosa* L.
39. *Prunus divaricata* Ledeb. разн. желтоплодная,  
*Prunus divaricata* разн. желтоплодная 'Подарок Санкт-Петербургу',  
*Prunus divaricata* Ledeb разн. красноплодная sp.,  
*Prunus divaricata* Ledeb f. *atropurpurea* Jacq. ф. Краснолиственная.
40. *Cerasus avium* (L.) Moench [*Prunus avium* (L.)L.]. 'Ленинградская черная'.
41. *Rosa majalis* Herrm.
42. *Rosa canina* L.
43. *Rosa rugosa* Thunb.
44. *Malus domestica* Borkh. 'Антоновка', 'Московская Грушовка', sp., 'Брусничное', 'Лобо', 'Куликовское', 'Орловское полосатое', 'Московский шафран', 'Солнышко', колонновидная 'Арба'.
45. *Malus* x *purpurea* (Borbier) Rehd. (M.x *atrosanguinea* (Spaeth) C. K. Schneid. x M. *pumila* Mill.).
46. *Malus prunifolia* (Willd.) Borkh.
47. *Malus baccata* (L.) Borkh.

Сем. *Schisandraceae*

48. *Schisandra chinensis* (Turcz.).

Сем. *Vacciniaceae*

49. *Vaccinium vitis-idaea* L.
50. *Vaccinium myrtillus* L.
51. *Vaccinium corymbosum* 'Bluetta', 'North blu', 'Bluegold', 'Reka', 'Patriot', 'Spartan', 'Northland'.
52. *Vaccinium macrocarpon* 'Stevens', 'Ben Lear', 'Macro Hoves'.

Сем. *Vitaceae*

53. *Vitis vinifera* L.

Исследования по адаптации растений к биотическим и абиотическим факторам среды, сортоиспытание, разработка и апробация агротехники плодово-ягодных культур актуальны, имеют практическую значимость и будут продолжены в следующие годы.

**Библиографический список**

1. Демидов А. С. Культурные растения Главного ботанического сада им. Н. В. Цицина Российской академии наук : 60 лет интродукции. М. : КМК, 2011. 511 с.
2. Интродукция растений : теоретические, методические и прикладные проблемы : материалы Международной конференции, посвященной 70-летию Ботанического

сада-института МарГТУ и 70-летию проф. М. М. Котова (10—14 авг., 2009 г., Йошкар-Ола) / под общ. ред. С. М. Лазаревой. Йошкар-Ола : МарГТУ, 2009. 464 с.

3. *Маевский П. Ф.* Флора Средней полосы Европейской части России. 10-е изд. М. : КМК, 2006. 600 с.

УДК 613.6.02

*В. Н. Зарипов, М. О. Баринаова, С. В. Королева*

## ПРОГНОСТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЕГЕТАТИВНОГО СТАТУСА В РАЗВИТИИ МЕЛКОТОЧЕЧНОГО КЕРАТОЛИЗА У КУРСАНТОВ-СПАСАТЕЛЕЙ

Приводятся данные об изменениях вегетативного статуса у курсантов с мелкоточечным кератолитом.

**Ключевые слова:** вариабельность сердечного ритма, вегетативный статус, курсанты, мелкоточечный кератолит.

The article provides the data on changes of vegetative status in cadets with pitted keratolysis.

**Key words:** heart rate variability, vegetative status, cadets, pitted keratolysis.

В настоящее время имеет место дефицит фундаментальных исследований в области изучения этиологии, особенностей патогенеза и на этой основе разработки новых технологий терапии бактериальных поражений кожи стоп при актуальности и востребованности таких исследований. Одним из наиболее малоизученных заболеваний в группе пиодермий является мелкоточечный кератолит. Немногочисленные исследования в Российской Федерации посвящены, как правило, его распространенности в отдельных регионах и поиску новых топических препаратов [1, 2, 3]. Кроме того, не разработаны стандарты оказания медицинской помощи этой группе пациентов, нет единой клинической классификации мелкоточечного кератолита, имеющиеся в медицинской литературе сообщения в отношении профилактики данного заболевания немногочисленны и носят общий характер [5, 10, 13, 14, 15].

Целью данного исследования является оценка прогностического значения вегетативного статуса в развитии мелкоточечного кератолита у курсантов-спасателей.

**Материал и методы исследования.** Исследование проведено на базе Ивановской пожарно-спасательной академии ГПС МЧС России в научно-исследовательской лаборатории «Медицина катастроф».

При выполнении работы были обследованы 29 здоровых курсантов-спасателей и 29 курсантов-спасателей с мелкоточечным кератолитом до и после воздействия тепловой нагрузки. У всех курсантов регистрировали электрокардиограмму при выполнении ортостатической пробы с последующим анализом показателей вариабельности сердечного ритма, на основании которых оценивали состояние вегетативного статуса. Исследование вариабельности сердечного ритма выполнено в положении лежа и стоя

---

© Зарипов В. Н., Баринаова М. О., Королева С. В., 2016

при регистрации ортостатической пробы. После записи пробы в положении стоя испытуемый подвергался воздействию тепловой нагрузки. Для этого обследуемый курсант садился на стул и грел ноги на электрической грелке в течение 15 минут. После этого вновь регистрировали электрокардиограмму.

Для проведения исследования использовали программное обеспечение и оборудование «ВНС-Микро» фирмы «Нейрософт» (Россия). Статистическая обработка полученных данных проведена по *t*-критерию Стьюдента.

**Результаты исследования и их обсуждение.** Анализ спектральных показателей вариабельности сердечного ритма у здоровых курсантов-спасателей позволил выявить следующие закономерности (табл. 1).

Таблица 1

## Показатели вариабельности сердечного ритма у здоровых курсантов

Показатель	До тепловой нагрузки		После тепловой нагрузки	
	лежа	стоя	лежа	стоя
TP, мс <sup>2</sup> /Гц	3690,36 ± 488,68	3468,62 ± 401,26	3692,13 ± 385,57	3550,64 ± 304,29
VLF, мс <sup>2</sup> /Гц	873,72 ± 74,19	447,83 ± 60,98*	1224,58 ± 36,67^	566,20 ± 66,23*
LF, мс <sup>2</sup> /Гц	655,24 ± 90,43	1667,21 ± 238,22*	904,56 ± 143,30	1712,70 ± 216,45*
HF, мс <sup>2</sup> /Гц	1362,50 ± 312,04	667,95 ± 135,24*	2220,43 ± 422,25^	741,94 ± 189,80*
LF/HF, у.е.	0,54 ± 0,06	3,20 ± 0,37*	0,52 ± 0,05	3,42 ± 0,36*

Достоверность отличий:

между группами лежа-стоя: \* —  $p < 0,05$

между группами до тепловой нагрузки — после тепловой нагрузки: ^ —  $p < 0,05$

На основании данных, полученных при обследовании здоровых курсантов, установлено, что показатель общей мощности спектра при выполнении ортостатической пробы не изменяется как до тепловой нагрузки, так и после ее воздействия. Данный показатель имеет примерно одинаковые значения независимо от условий исследования, что свидетельствует о стабильном запасе здоровья.

Показатель мощности спектра в диапазоне очень низкочастотных влияний у здоровых курсантов достоверно уменьшается при выполнении ортостатической пробы и до тепловой нагрузки на 49 %, и после ее воздействия на 54 %. Данные результаты указывают на ослабление гуморальной регуляции деятельности сердца [4]. При этом значение данного показателя в положении «лежа» после тепловой нагрузки больше, чем до тепловой нагрузки.

Показатель мощности спектра в диапазоне низкочастотных влияний у здоровых курсантов при ортостатической пробе достоверно возрастает, что имеет место как до тепловой нагрузки на 61 %, так и после воздействия тепловой нагрузки на 47 %, т. е. регуляция деятельности сердца осуществляется у них за счет умеренного увеличения вклада симпатической вегетативной нервной системы [11].

Показатель мощности спектра в диапазоне высокочастотных влияний при выполнении ортостатической пробы здоровыми курсантами характеризуется достоверным снижением и до тепловой нагрузки на 51 %, и после ее воздействия на 67 %, что свидетельствует об ослаблении парасимпатической



регуляции деятельности сердца [9]. При этом значение данного показателя в положении лежа после тепловой нагрузки больше, чем до ее воздействия.

У здоровых курсантов показатель соотношения мощностей спектра в диапазонах низко- и высокочастотных влияний достоверно повышается при выполнении ортостатической пробы на 83 % до тепловой нагрузки и на 84 % после воздействия тепловой нагрузки. Возрастание показателя соотношения мощностей спектра свидетельствует о доминировании симпатической регуляции в управлении работы сердцем [12]. Это свидетельствует об адекватной реакции организма курсантов на нагрузку и хороших адаптационных резервах. Причем данные показатели имеют примерно одинаковые значения в положении лежа и в положении стоя.

Анализ спектральных показателей вариабельности сердечного ритма у курсантов-спасателей с мелкоочечным кератолизом позволил выявить следующие закономерности (табл. 2).

Таблица 2

**Показатели вариабельности сердечного ритма у курсантов  
с мелкоочечным кератолизом**

Показатель	До тепловой нагрузки		После тепловой нагрузки	
	лежа	стоя	лежа	стоя
TP, мс <sup>2</sup> /Гц	4219,09 ± 559,34	3818,26 ± 540,51	4285,48 ± 537,11	3997,60 ± 498,86
VLF, мс <sup>2</sup> /Гц	1845,78 ± 190,04	2556,70 ± 344,67	1877,08 ± 221,89	2426,24 ± 265,80
LF, мс <sup>2</sup> /Гц	1943,44 ± 190,62	1845,35 ± 169,06	2080,00 ± 152,36	1811,56 ± 235,87
HF, мс <sup>2</sup> /Гц	3235,67 ± 538,51	741,33 ± 200,81*	2989,09 ± 412,63	934,65 ± 143,13*
LF/HF, у.е.	0,49 ± 0,06	3,61 ± 0,33*	0,55 ± 0,06	4,63 ± 0,48*

Достоверность отличий:

между группами лежа-стоя: \* —  $p < 0,05$

между группами до тепловой нагрузки — после тепловой нагрузки: ^ —  $p < 0,05$

Показатель общей мощности спектра у курсантов с мелкоочечным кератолизом при ортостатической пробе не изменяется как до тепловой нагрузки, так и после воздействия тепловой нагрузки. Данный показатель имеет примерно одинаковые значения независимо от условий исследования, что свидетельствует о стабильном запасе здоровья. Таким образом, наблюдается аналогичная закономерность, как у здоровых курсантов.

У курсантов с мелкоочечным кератолизом показатель мощности спектра в диапазоне очень низкочастотных влияний при выполнении ортостатической пробы не изменяется как до тепловой нагрузки, так и после воздействия тепловой нагрузки. Причем данные показатели имеют примерно одинаковые значения в положении лежа и в положении стоя.

Показатель мощности спектра в диапазоне низкочастотных влияний у курсантов с мелкоочечным кератолизом также не изменяется при выполнении ортостатической пробы как до тепловой нагрузки, так и после ее воздействия. Данный показатель имеет примерно одинаковые значения независимо от условий исследования.

У курсантов с мелкоочечным кератолизом показатель мощности спектра в диапазоне высокочастотных влияний изменятся аналогично этому показателю у здоровых курсантов. Он достоверно уменьшается на 77 % до тепловой

нагрузки и на 69 % после тепловой нагрузки. Полученные данные указывают на тот факт, что в организме курсантов с мелкоточечным кератолизом происходит более значимое ослабление парасимпатической регуляции деятельности сердца, чем у здоровых курсантов [5].

У курсантов с мелкоточечным кератолизом показатель соотношения мощностей спектра в диапазонах низко- и высокочастотных влияний достоверно увеличивается при ортостатической пробе как до тепловой нагрузки на 86 %, так и после ее воздействий на 88 %. Таким образом, этот показатель одинаково изменяется у здоровых курсантов и курсантов с мелкоточечным кератолизом. Его увеличение свидетельствует о доминировании симпатической регуляции работы сердца [6].

Таким образом, у здоровых курсантов изменения спектральных показателей вариабельности сердечного ритма показывают на преобладание симпатической регуляции деятельности сердца, что отвечает нагрузке, влияющей на организм. У курсантов с мелкоточечным кератолизом изменения спектральных показателей вариабельности сердечного ритма указывают на преобладание симпатической регуляции деятельности сердца, которая формируется не в результате увеличения вклада симпатической нервной системы, а за счет значительного ослабления парасимпатических влияний.

Текущая активность симпатического и парасимпатического отделов является результатом многоконтурной и многоуровневой реакции системы регуляции кровообращением, изменяющей во времени свои параметры для достижения оптимального для организма приспособительного ответа. Данные изменения отражают адаптационную реакцию целостного организма. На фоне любого психоэмоционального напряжения имеет место смещение баланса вегетативной нервной системы в сторону симпатикотонии, что проявляется, прежде всего, в нарушении ассоциативных вегетативных связей между водителями ритмов сердца и легких. В условиях выраженной функциональной нагрузки или при стрессе все системы организма подчинены достижению цели и требованиям, предъявляемые к работе сердца, упрощаются: оно должно развить лишь максимальную производительность. При этом влияние симпатической нервной системы приводит к выравниванию ритма сердца [7].

Однако необходимо отметить, что в проведенном нами исследовании преобладание симпатической регуляции деятельности сердца у здоровых курсантов обеспечивается сбалансированным увеличением вклада симпатической нервной системы на фоне снижения парасимпатической, а у курсантов с мелкоточечным кератолизом это связано со сниженной реактивностью парасимпатического отдела вегетативной нервной системы, что свидетельствует о формировании стрессогенного «следа» от мелкоточечного кератолиза в состоянии адаптационного резерва организма курсантов без признаков предельного напряжения механизмов регуляции.

В многочисленных исследованиях отдельных групп опасных профессий [6, 8] были сделаны попытки оценить адаптационный резерв организма с использованием вариабельности сердечного ритма и выделить несколько наиболее информативных признаков, чтобы отнести обследуемого человека к группе с той или иной степенью выраженности изменений регуляции на фоне воздействия стресса. В ходе этих исследований было установлено, что начальные изменения регуляции, классифицируемые как умеренное напряжение адаптации, практически не сопровождаются изменениями фоновых показателей вариабельности сердечного ритма, т. е. функциональные резервы

организма оказываются достаточными для поддержания сердечно-сосудистого гомеостаза в покое без привлечения надсегментарных отделов, в отличие от состояния выраженного напряжения регуляции, когда участие данных механизмов становится необходимым даже в условиях отсутствия внешнего воздействия.

В целом результаты выполненного исследования отражают необходимость разработки и применения специально ориентированных мероприятий, направленных на профилактику и лечение мелкоточечного кератолита у курсантов.

### Выводы

1. У здоровых курсантов-спасателей при выполнении ортостатической пробы изменения спектральных показателей variability сердечного ритма до и после воздействия тепловой нагрузки свидетельствуют об умеренном преобладании симпатической регуляции деятельности сердца.

2. Изменения спектральных показателей variability сердечного ритма при ортостатической пробе как до, так и после воздействия тепловой нагрузки, у курсантов-спасателей с мелкоточечным кератолитом указывают на снижение реактивности парасимпатического отдела вегетативной нервной системы.

3. Состояние вегетативного статуса курсантов-спасателей определяет потенциальную возможность развития у них мелкоточечного кератолита.

### Библиографический список

1. *Александров А. Т., Макаров Ф. Ю.* Мелкоточечный кератолит. Эффективное решение широко распространенной проблемы // Тезисы X Всероссийской конференции дерматологов. М., 2006. С. 30—31.
2. *Белькова Е. А.* Пиодермии в амбулаторной практике // Клиническая микробиология, антимикробиология, химиотерапия. 2005. Т. 7, № 3. С. 255—270.
3. *Ефанова Е. Н.* Мелкоточечный кератолит: клинические проявления, оптимизация методов диагностики, терапии и профилактики : автореф. ... канд. мед. наук. Новосибирск, 2012. 22 с.
4. *Зарипов В. Н., Баринаева М. О.* Изменения показателей сердечного ритма у студентов с разным уровнем психоэмоционального напряжения во время сдачи экзаменов // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 3. URL: <http://www.science-education.ru/rules/> (дата обращения: 07.11.2013).
5. *Королева С. В.* Мелкоточечный кератолит в структуре дерматовенерологической заболеваемости курсантов института противопожарного профиля // Проблемы и перспективы современной науки с материалами Четвертой Международной Телеконференции «Фундаментальные науки и практика» : сборник научных трудов. 2013. Т. 3, № 1. С. 34—42.
6. *Королева С. В., Мкртычян А. С., Петров Д. Л., Зарипов В. Н., Баринаева М. О.* Особенности variability сердечного ритма у курсантов вуза МЧС ГПС России в различных группах профпригодности // Подготовка кадров в системе предупреждения и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций : материалы Международной научно-практической конференции. СПб., 2014. С. 124—126.
7. *Курьянова Е. В.* Вегетативная регуляция сердечного ритма : результаты и перспективы исследований. Астрахань : ИД «Астраханский университет», 2011. 139 с.
8. *Мкртычян А. С., Королева С. В., Петров Д. Л., Зарипов В. Н., Баринаева М. О.* Категории профессиональной пригодности и особенности деятельности сердечно-сосудистой системы курсантов института противопожарного профиля // Проблемы психологических последствий, связанных с радиационными авариями и

- другими чрезвычайными ситуациями: материалы Международной научно-практической конференции. М., 2014. С. 77—79.
9. *Одинак М. М., Котельников С. А., Ноздрачев А. Д., Шустов Е. Б., Коваленко И. Ю., Давыденко В. Ю.* Вариабельность ритма сердца: представления о механизмах. СПб.: Российская ВМА, 2009. 157 с.
  10. *Русак Ю. Э., Лакомова И. Н., Феденкова Л. А., Ефанова Е. Н., Голубничая М. А., Дроздович Е. А.* О мелкоточечном кератолизе // Вестник дерматологии и венерологии. 2007. № 6. С. 58—59.
  11. *Рябыкина Г. В., Соболев А. В.* Вариабельность ритма сердца. М.: Оверлей, 2000. 200 с.
  12. *Яблучанский Н. И., Мартыненко А. В.* Вариабельность сердечного ритма в помощь практическому врачу: для настоящих врачей. Харьков, 2010. 215 с.
  13. *Longshau C. M., Wright J. D., Farrel A. M., Holland K. T.* Kytococcus sedentarius, the organism associated with pitted keratolysis, produces two keratin-degrading enzymes // J. Appl. Microbiol. 2002. Vol. 93, № 5. P. 810—816.
  14. *Singh G., Naik C. L.* Pitted keratolysis // Indian Journal of Dermatology, Venereology and Leprology. 2007. № 3. P. 213—215.
  15. *Wohlrab J., Rohrbach D., Marsch W. C.* Keratolysis sulcata (pitted keratolysis): clinical symptoms with different histological correlates // Br. J. Dermatol. 2000. Vol. 143, № 6. P. 1348—1349.

УДК 576.895.771

*В. А. Исаев, А. М. М. Альджабали*

## ЭКОЛОГИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВРЕМЕННОЙ СИТУАЦИИ ПО ПОТЕНЦИАЛЬНОМУ РАСПРОСТРАНЕНИЮ МАЛЯРИИ В НЕКОТОРЫХ РЕГИОНАХ РОССИИ

Представлены данные по экологическому моделированию развития *P. vivax* в популяциях малярийных комаров — потенциальных переносчиков малярии в некоторых регионах РФ.

**Ключевые слова:** *P. vivax*, малярийные комары, переносчики (векторы), малярия, экологическое моделирование.

This review presents data on the ecological modeling of *P. vivax* populations of malarial mosquitoes — potential vectors of malaria in several regions of the Russian Federation.

**Key words:** *P. vivax*, Culicidae, Anopheles, vectors, malaria, ecological model.

Малярия на территории нашей страны как массовое заболевание была ликвидирована в 60-х гг. XX в., но в последние годы опасность ее возвращения сохраняется [6].

В настоящее время в ряде регионов происходит увеличение численности малярийных комаров — потенциальных переносчиков малярии в течение сезона активности, усиливаются миграции населения из ближнего и дальнего зарубежья.

Значительные изменения температурного режима способствуют как изменению ареалов массовых видов [26, 30], так и возрастанию опасности заражения людей малярией в тех местах, где ранее она была ликвидирована, в том числе в областях Центрального (Орловская, Воронежская) и Северо-Западного (Вологодская) округа России [16, 18—20 и др.].

Наряду с элиминацией малярии в отдельных развитых странах умеренного пояса в мире до настоящего времени сохраняется напряженная эпидемиологическая ситуация по малярии в странах субтропического и тропического пояса, а в умеренных широтах, в том числе на территории России и, в частности, в Ивановской области, продолжают регистрироваться случаи возникновения малярии в основном завозного характера, при этом усилия направляются на предупреждение перехода к местной передаче малярии.

Аналогичные проблемы стоят и перед другими областями европейской и азиатской частей России, где уже стали отмечаться местные случаи малярии [5, 13, 15 и др.].

В борьбе с малярией в регионах важную роль играют изучение современного состояния популяций кровососущих комаров, оценка доли малярийных комаров в сборах, расчеты сроков развития комаров и периодов продолжительности сезонов передачи ими возбудителей местной (*Plasmodium vivax*) малярии.

Изменения температурного режима в ряде регионов Земли, в том числе в Российской Федерации и, в частности, в областях центра и северо-запада нашей страны во второй половине XX — начале XXI в., практически не были отражены в исследованиях комаров последних лет.

Так, за период с 40—50 гг. прошлого века после работ Н. В. Хелевина [21—24] в Ивановской области до настоящего времени была выполнена лишь одна работа, где непосредственно изучался температурный режим в местах дневок комаров [25]. Наиболее крупные исследования экологии комаров по сборам на прокормителях в последние 10—12 лет проводились в Центре Нечерноземной зоны и на Северо-Западе РФ [1, 8—10, 17]. Однако они не затрагивали рассматриваемые нами вопросы, связанные с расчетами сроков развития плазмодиев, потенциальной продолжительности сезонов эффективной заражаемости комаров малярией в современных условиях.

В связи с этим потребовалось проведение работы по оценке потенциальной опасности малярийных комаров и возможностей распространения малярии в отдельных регионах России. Для этого провели расчеты влияния температур воздуха в годы наблюдений на сезонность передачи малярии для возбудителей, *Plasmodium vivax*, передаваемых малярийными комарами, по методу Ш. Д. Мошковского [14].

В нашем регионе был проведен расчет потенциальных сроков развития спорозитов плазмодиев по многолетним среднесуточным температурам за период метеонаблюдений с 1949 по 1978 гг. [11] и архивным ежедневным данным температур воздуха в 2013 г. метеостанций следующих городов: Иваново (аэропорт) (метеостанция № 27347), Владимир (№ 27532), Смоленск (№ 26781), Псков (№ 26258) [29].

Результаты представлены в соответствии с общепринятыми методами в виде таблицы с указанием сроков начала и окончания эффективной заражаемости комаров, начала эпидемического сезона, числа спорогоний и других показателей [3, 12].

При сравнении среднесуточных многолетних температур в Ивановской области [11] с данными за май — август 2013 г. [29] отмечалось заметное превышение климатической нормы.

По многолетним среднесуточным температурам за период метеонаблюдений в 1949—1978 гг. в Ивановской области при температурной модели развития возбудителей малярии в 16 °С для *P. vivax* в течение сезона была возможна одна завершённая спорогония (см. табл.).

В 2013 г. по среднесуточным температурным данным в Ивановской, Владимирской, Смоленской и Псковской областях первая спорогония в комарах обоих видов плазмодиев начиналась в первой половине мая. Для *P. vivax* в трех первых регионах число завершённых спорогоний составило 4, а в четвертом регионе (Псковской области) — 3 (см. табл.).

Таким образом, экологическое моделирование ситуации по развитию малярии показало, что в 2013 г. во всех четырех регионах эпидемический сезон передачи малярии мог начинаться в июне.

**Теоретические характеристики развития *P. vivax* в организме малярийных комаров согласно среднесуточным температурам в апреле — октябре: средней многолетней в 1949—1978 гг. в г. Иванове, средней в 2013 г. в Иванове, Владимире, Смоленске, Пскове**

Годы и регионы	1949—1978 Иваново	2013 Иваново	2013 Владимир	2013 Смоленск	2013 Псков
Элементы эпидсезона и оценки маляриогенного риска					
Даты начала сезона эффективной заражаемости комаров = начало первой спорогонии	Третья декада июня	Первая декада мая	Первая декада мая	Первая декада мая	Первая декада мая
Даты начала эпидсезона = следующий день от конца первой спорогонии	Первая декада августа	Третья декада июня	Вторая декада июня	Первая декада июня	Первая декада июня
Конец сезона эффективной заражаемости комаров = начало последней спорогонии	Первая декада августа	Первая декада августа	Третья декада июля	Третья декада июля	Вторая декада июля
Даты конца последней спорогонии	Вторая декада августа	Третья декада августа	Вторая декада августа	Третья декада августа	Вторая декада августа
Число завершённых спорогоний	1	4	4	4	3
Число дней с температурой 16 °С и выше	53	91	91	91	96

Данные теоретических расчетов развития плазмодиев были сопоставлены с опубликованной ранее фенологией комаров по сборам в 2013 г. в этих регионах [2]. При вылете кровососущих комаров весной и обнаружении их разными методами учета в мае [2] в дальнейшем во всех изученных регионах

в 2013 г. наблюдалось увеличение доли малярийных комаров в сборах от весны к концу лета, что указывало на потенциальную опасность трансмиссии малярии при появлении больных этим заболеванием [2, с. 5].

Изучение реальной ситуации по малярии в отдельных регионах России в прежние десятилетия по литературным данным и проведенные нами исследования позволяют предположить, что наиболее вероятно в условиях современного изменения температурного режима в течение сезонов года в изученных регионах модель развития местной малярии с возбудителем *P. vivax* и потенциальным переносчиком *Anopheles messeae*. «Причин этому две: во-первых, *P. vivax* хорошо адаптирован к передаче и выживанию в условиях умеренного климата. Во-вторых, *P. vivax* легко передается любым эффективным переносчиком вне зависимости от того, происходят ли возбудитель и переносчик из одного географического района или нет» [4, с. 49].

В то же время следует отметить, что такие виды, как *Anopheles maculipennis*, *A. messeae* и *A. claviger*, встречающиеся в Московской области, «восприимчивы ко всем известным в настоящее время видам возбудителей малярии человека» [7, с. 324]. Те же виды комаров известны и в исследованных нами регионах России, в частности, в Ивановской области [8—10, 22—24]. При этом еще в период распространения малярии в 40-х гг. XX в. отмечалось, что «гг. Иваново и Шуя стоят на первом месте по количеству заболеваний в области» [24, с. 43], а «перенос заболевания осуществляется двумя видами малярийных комаров *Anopheles maculipennis* v. *messeae* и *An. claviger*. Основное значение в распространении малярии имеет первый из указанных видов» [24, с. 44].

Это не исключает того, что другие возбудители малярии могут циркулировать в тех же областях России. Так, *P. falciparum* из Афганистана способен передаваться комарами из нашей фауны. Кроме того, возникновение вспышек тропической малярии среди жителей крупных международных аэропортов и жителей окрестных поселков может быть связано с завозом малярийных комаров из самых разных тропических зон самолетами [4, с. 49].

Следует отметить также важные предпосылки для распространения малярии в нашей стране, сложившиеся еще в конце XX в. в России и пограничных с ней или близко расположенных странах и усилившиеся сейчас. Среди них: увеличение миграции населения по всей стране, ограничение или прекращение мероприятий по борьбе с малярией на ряде пограничных и близких с Россией территориях (республики Закавказья, Средней Азии, Афганистан), что увеличивает опасность мигрантов с этих территорий и ведет к ухудшению материального положения значительной части населения России, снижая таким образом сопротивляемость к болезням [7, с. 326].

Оценка маляриогенного риска показывает, что по числу дней (53) со среднесуточной температурой 16 °С и числу возможных циклов спорогонии (1, 3) по данным 1949—1978 гг. в Ивановской области наш регион в тот период можно было отнести к зоне неустойчивого риска малярии [3]. По данным 2013 г. Ивановская, Владимирская, Смоленская и Псковская области, т. е. все обследуемые территории, могли быть отнесены уже к зоне умеренного риска по трехдневной малярии. Число дней со среднесуточной температурой 16 °С в них в 2013 г. было от 91 до 96, а число возможных спорогоний не превышало 3—4. С начала эпидемического сезона передачи в июне до стойкого снижения температуры вниз через отметку 16 °С во всех регионах (в конце августа) проходило не менее двух месяцев, а до конца эпидсезона, т. е. впадения

основной массы популяций комаров в диапаузу [3, 4], вероятно, еще не менее 1,5—2 недель. В период эпидсезона с июня по август в Ивановской области небольшое понижение среднесуточной температуры ниже 16 °С наблюдалось в течение одного дня в июне и одного дня в июле. В других регионах такие понижения были кратковременными (как правило, 1—3 дня) и не достигали 10 °С, т. е. уровня, при котором возможна гибель спорозоитов. Понижения среднесуточной температуры до пяти дней отмечались в пределах 15—12,5 °С в Смоленской и в пределах 15—13 °С в Псковской областях. Такие понижения при наличии потенциального переносчика малярии *A. messeae* не являются критичными, так как он тесно связан с помещениями для скота, на котором и питается чаще, чем на человеке [3]. При этом в помещениях на дневках обычно на 2—3 °С теплее, чем в открытых станциях, что благоприятно сказывается на сроках развития плазмодиев в этой части популяции комаров, даже если температура воздуха вне помещений составляет 13—15 °С [19, 25].

В заключение необходимо обратить внимание на то, что во всех четырех изученных областях в последние 15 лет по литературным данным отмечались случаи завоза малярии, при этом, например, в нашей области регистрировались случаи завоза как трехдневной, так и тропической малярии, а также были завозные случаи с разных континентов [27, 28], что требует мониторинга экологической и энтомологической ситуации и принятия мер по предупреждению этого заболевания.

#### Библиографический список

1. Айбулатов С. В. Фауна и экология двукрылых насекомых комплекса гнуса на территориях, прилегающих к Финскому заливу : автореф. дис. ... канд. биол. наук. СПб., 2009. 24 с.
2. Альджабали А. М. М., Исаев В. А. Активность комаров (Culicidae) в агроценозах и их потенциальная роль в передаче заболеваний // Аграрная наука в условиях модернизации и инновационного развития России : материалы научно-методической конференции с международным участием, 28 октября 2015 г., г. Иваново. Иваново, 2015. Т. 3. С. 4—6.
3. Артемьев М. М., Баранова А. М., Дарченкова Н. Н., Дремова В. П., Ганнушкина Л. А., Маркович Н. Я., Сергиев В. П. Малярийные комары России (род *Anopheles*) // Медицинская паразитология и паразитарные болезни. 2000. № 2. С. 40—45.
4. Беляев А. Е., Лысенко А. Я. Малярия (паразитология, иммунология, эпидемиология). М. : ЦИУВ, 1992. 54 с.
5. Богомазова О. Л., Журина Т. А., Чистофорова Г. А., Шихарбиев Б. В. Малярийные комары в Иркутской области и их роль в передаче малярии // Экология, биоразнообразие и значение насекомых и клещей экосистем России : сборник научных работ по материалам II Республиканской научной конференции 27—29 мая 2002 г. Великий Новгород : НовГУ, 2002. С. 90—92.
6. Виноградова Е. Б., Карпова С. Г. Сезонные и суточные ритмы кровососущих комаров / Зоологический институт РАН. СПб., 2010. 238 с.
7. Горностаева Р. М., Данилов А. В. Комары Москвы и Московской обл. М. : КМК Scientific Press, 1999. 342 с.
8. Егоров С. В. Экология кровососущих двукрылых насекомых (Insecta, Diptera: Culicidae, Simuliidae, Tabanidae) и защита животных от них в центральном районе Нечерноземной зоны Российской Федерации : автореф. дис. ... д-ра биол. наук. М., 2012. 52 с.



9. *Исаев В. А., Егоров С. В.* Комары (Diptera: Culicidae) и их потенциальное значение в трансмиссии дирофиляриозов в средних и малых населенных пунктах Ивановской области // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. 2004. № 3. С. 3—8.
10. *Исаев В. А., Майорова А. Д., Егоров С. В.* Кровососущие членистоногие Ивановской области // Научно-исследовательская деятельность в классическом университете: теория, методология и практика : материалы научной конференции, Иваново, 6 февраля 2001. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2001. С. 142—143.
11. Климат Иванова / под ред. Ц. А. Швер, С. В. Рязановой. Л. : Гидрометеоздат, 1981. 160 с.
12. *Лебедева Н. И.* Мониторинг зараженности комаров Anopheles малярийным плазмодием в Узбекистане // Материалы I Всероссийского совещания по кровососущим насекомым. СПб. : Зоолог. ин-т РАН, 2006. С. 109—111.
13. *Миронова В. А.* Географические предпосылки восстановления малярии в различных экосистемах: оценка и прогноз : дис. ... канд. геогр. наук. М., 2006. 159 с.
14. *Мошковский Ш. Д.* Основные закономерности эпидемиологии малярии. М., 1950. 320 с.
15. *Онищенко Г. Г.* Состояние заболеваемости паразитарными болезнями в 1998 году и меры по его стабилизации в Российской Федерации // Медицинская паразитология и паразитарные болезни. 2000. № 1. С. 3—7.
16. *Рогачев Н. Н., Бубликова Л. И.* Эпидемиологическое значение популяций малярийных комаров (Culicidae, Anopheles) в условиях антропогенных ландшафтов Орловской области // Материалы I Всероссийского совещания по кровососущим насекомым. СПб. : Зоолог. ин-т РАН, 2006. С. 185—186.
17. *Скрипченко Ф. А.* Современное состояние фауны и экологии кровососущих комаров (Diptera, Culicidae) Центра Средней полосы Европейской части России : автореф. дис. ... канд. биол. наук. М., 2000. 21 с.
18. *Степкин Ю. И., Мамчик Н. П., Герик Е. П.* Анализ возможности возобновления распространения заболеваемости малярией на территории г. Воронежа // Материалы I Всероссийского совещания по кровососущим насекомым. СПб. : Зоолог. ин-т РАН, 2006. С. 193—195.
19. *Филоненко И. В., Рыбакова Н. А.* Опыт изучения эпидемиологической значимости малярийных комаров на территории Вологодской области // Материалы I Всероссийского совещания по кровососущим насекомым. СПб. : Зоолог. ин-т РАН, 2006. С. 205—208.
20. *Филоненко И. В.* Факторы возникновения очагов местной малярии на территории Вологодской области // Принципы экологии. 2013. № 2. С. 36—45. DOI: 10.15393/j1.art.2013.2521
21. *Хелевин Н. В.* Характеристика зимовок малярийных комаров в Ивановской области // Медицинская паразитология. 1941. Т. 10, № 3—4. С. 440—443.
22. *Хелевин Н. В.* Некоторые итоги изучения малярии в условиях Ивановской области : сборник научных трудов Ивановского медицинского института. 1952. Вып. 8. С. 131—136.
23. *Хелевин Н. В.* Некоторые итоги изучения биологии переносчиков заразных заболеваний в Ивановской области // К познанию фауны и флоры Ивановской области : сборник научных работ. Иваново, 1961. Вып. 1. С. 9—35.
24. *Хелевин Н. В., Куприянов А. А., Гарелин Н. В.* К вопросу о типизации малярийных очагов в Ивановской области // Малярия в Ивановской области. Иваново, 1947. С. 41—51.
25. *Шикова В. П.* Температурный режим в основных местах дневок малярийных комаров // Морфология и экология двукрылых насекомых : сборник научных работ. Иваново : Иван. отд. МОИП, 1991. С. 33—37.
26. *Ясюкевич В. В., Гельвер Е. С.* Влияние изменения климата на распространение переносчиков в России и ее ближайшем окружении // Материалы I Всероссий-

- ского совещания по кровососущим насекомым. СПб.: Зоолог. ин-т РАН, 2006. С. 237—239.
27. URL: <http://docs.pravo.ru/document/view/13091983/8778878/> (дата обращения: 26.06.2014).
28. URL: <http://37.rosпотреbnadzor.ru/document/4573> (дата обращения: 6.05.2016).
29. URL: [http://rp5.ru/Архив\\_погоды](http://rp5.ru/Архив_погоды) (дата обращения: 16.03.2016).
30. Novikov Y. M., Vaulin O. V. Expansion of *Anopheles maculipennis* s.s. (Diptera: Culicidae) to northeastern Europe and northwestern Asia: Causes and Consequences // *Parasites & Vectors*. 2014. 7:389. DOI:10.1186/1756-3305-7-389. Published: 22 August 2014.

УДК 612.178.6

*Н. К. Кормилицына***ПОКАЗАТЕЛИ ВАРИАБЕЛЬНОСТИ СЕРДЕЧНОГО РИТМА  
И ПСИХОФИЗИОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ СТУДЕНТОВ**

Приведены данные о показателях variability сердечного ритма у студентов с различным уровнем экстраверсии.

**Ключевые слова:** variability ритма сердца, экстраверсия, интроверсия.

The data about indices of heart rate variability of students with different levels of extroversion are given.

**Key words:** heart rate variability, extroversion, introversion.

Поступление в высшее учебное заведение является важным моментом в жизни человека в различных отношениях. Студенту приходится адаптироваться к новым условиям жизни, отрыву от привычного коллектива сверстников, новизне контактов, усиленному потоку информации, к обязательному режиму учебной работы, необходимости регулярно сдавать экзамены, снижению двигательной активности в течение дня и другим сложностям. Эти факторы способствуют увеличению нагрузки как на нервную, так и на сердечно-сосудистую систему [6, 8]. С другой стороны, успешность адаптации студентов к обучению в вузе во многом определяется их психофизиологическими показателями.

Известно, что по отношению к людям и окружающей их обстановке одних людей относят к экстравертам, других к интровертам, третьих к промежуточной группе. Актуальность исследования обусловлена необходимостью учитывать в процессе обучения психофизиологические параметры студентов с различным уровнем экстраверсии—интроверсии, а также физиологические характеристики, определяющие их адаптационно-приспособительные механизмы.

Целью работы явилось выявление особенностей психофизиологических показателей и вегетативной регуляции сердца у студентов с различным уровнем экстраверсии.

В исследовании принимали участие 43 студентки 1 курса биолого-химического факультета ИвГУ, которые дали добровольное письменное согласие на это. Уровень экстраверсии—интроверсии и нейротизма оценивали с помощью опросника Айзенка МРІ; изучение психофизиологических показателей, касающиеся силы и подвижности нервных процессов, уравновешенности процессов возбуждения и торможения, концентрации возбуждения проводили по комплексу методик с помощью комплекса «НС-Психотест»; кардиоинтервалография по Баевскому осуществлялась с применением активной ортостатической пробы с помощью прибора «Рео-спектр» фирмы «Нейрософт».

Результаты были статистически обработаны с помощью *t*-критерия Стьюдента и критерия Манна — Уитни.

### Результаты исследования и их обсуждение

На основании результатов изучения уровня экстраверсии—интроверсии все студенты были распределены на две группы, их психофизиологические параметры приведены в табл. 1. Обнаружено, что уровень нейротизма студентов в группе экстравертов достоверно выше ( $p < 0,01$ ).

Таблица 1

#### Психофизиологические показатели студентов

Психофизиологические показатели, методики исследования	Группа экстравертов, $n = 21$	Группа интровертов, $n = 22$
Экстраверсия—интроверсия, баллы	$34,2 \pm 1,3$	$10,0 \pm 3,4^{**}$
Уровень нейротизма, баллы	$29,6 \pm 2,9$	$15,1 \pm 5,4^{**}$
Теппинг-тест, Гц	$5,3 \pm 0,2$	$5,7 \pm 0,1^*$
Реакция на движущийся объект, мс	$-35,4 \pm 10,1$	$-10,4 \pm 7,6^*$
Критическая частота слияния мельканий, Гц	$39,9 \pm 0,9$	$37,9 \pm 0,9$
Простая зрительно-моторная реакция, мс	$250,3 \pm 8,3$	$257,7 \pm 14,1$
Помехоустойчивость, мс	$288,8 \pm 6,5$	$308,1 \pm 3,2$
Красно-черные таблицы, с	$35,3 \pm 2,2$	$40,1 \pm 3,2$

Примечание: \* —  $p < 0,05$ , \*\* —  $p < 0,01$  между группами.

По ряду психофизиологических показателей, изученных с помощью таких методик, как помехоустойчивость, простая зрительно-моторная реакция, критическая частота слияния мельканий, красно-черные таблицы Шульце — Платонова, достоверных различий между группами не выявлено. Это свидетельствует об одинаковой скорости реакции, о достаточно высокой концентрации внимания студентов, о равной степени выраженности координации двигательных актов, высокой разрешающей способности зрительного анализатора у студентов обеих групп.

Достоверные отличия в воспроизведении теппинг-теста свидетельствуют о большей силе процессов возбуждения у экстравертов. Характеристика основных нервных процессов произведена с помощью методик теппинг-теста, критической частоты слияния мельканий, простой зрительно-моторной реакции; уравновешенность возбуждения и торможения оценивалась с помощью методики исследования реакции на движущийся объект, обобщенные результаты приведены на рис. 1.

Выявлено, что для студентов обеих групп характерны все разновидности соотношения основных нервных процессов, однако у экстравертов чаще встречается преобладание процессов возбуждения, в то время как у интровертов — уравновешенность процессов возбуждения и торможения.

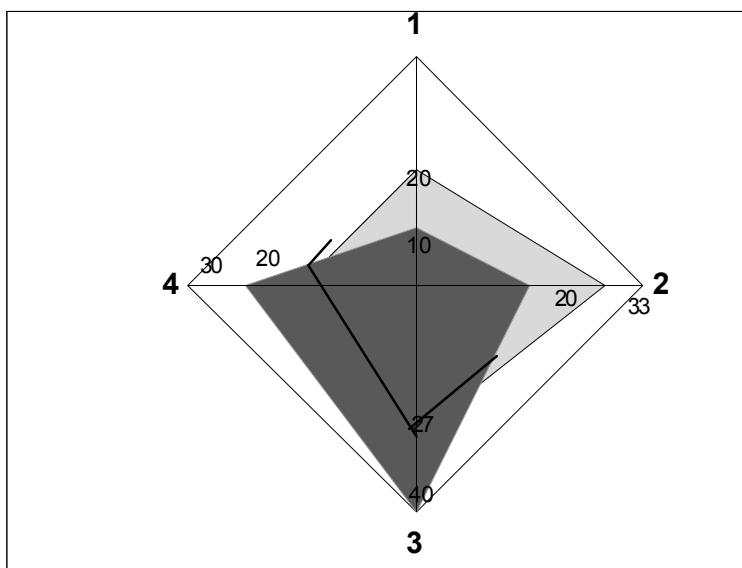


Рис. 1. Характеристика основных нервных процессов студентов: (светлое поле — экстраверты, темное — интроверты): шкала 1 — абсолютное преобладание процессов возбуждения, шкала 2 — преобладание процессов возбуждения, шкала 3 — средняя уравновешенность процессов возбуждения и торможения, шкала 4 — преобладание процессов торможения.

На рис. 2 приведены сведения о распределении студентов по эмоциональной устойчивости. Было выяснено, что в группе интровертов 50 % имеют низкую эмоциональную устойчивость, в то время как в группе экстравертов число таковых составляет лишь 7 % ( $p < 0,01$ ). Результаты свидетельствуют о том, что большее количество студентов-экстравертов обладают высокой эмоциональной устойчивостью.

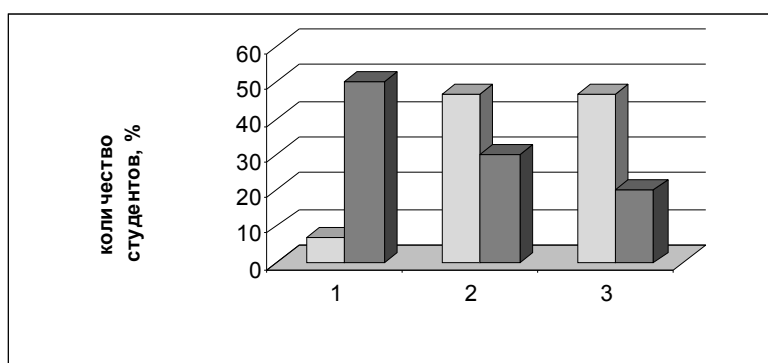


Рис. 2. Распределение студентов по уровню эмоциональной устойчивости (светлые столбцы — экстраверты, темные — интроверты): 1 — низкая, 2 — средняя, 3 — высокая; \* — достоверность отличий между группами при  $p < 0,01$

Психологическая и социальная адаптация, в том числе и к обучению в вузе, происходит во взаимосвязи с адаптацией физиологических систем организма, ведущей из которых является сердечно-сосудистая [2, 5]. Кардиоинтервалография — метод, позволяющий по параметрам синусового сердечного ритма оценить состояние адаптационно-приспособительных механизмов целостного организма. Результаты исследования параметров сердечного ритма студентов в ответ на функциональную пробу приведены в табл. 2.

Таблица 2

## Показатели вариабельности ритма сердца при ортостатической пробе

Показатели ритма сердца	Группа экстравертов, n = 21		Группа интровертов, n = 22	
	Положение лежа	Положение стоя	Положение лежа	Положение стоя
ЧСС — частота сердечных сокращений, уд/мин	76,0 ± 1,9	96,9 ± 2,7**	74,9 ± 2,2	94,4 ± 3,1**
М — математическое ожидание, с	0,82 ± 0,02	0,60 ± 0,02**	0,84 ± 0,02	0,70 ± 0,02**##
Мо — мода, с	0,84 ± 0,03	0,60 ± 0,02**	0,80 ± 0,02	0,65 ± 0,02**
АМо — амплитуда моды, с	38,0 ± 2,99	42,3 ± 2,38	32,5 ± 2,66	40,8 ± 3,27*#
СК — среднее квадратичное отклонение, с <sup>2</sup>	0,08 ± 0,01	0,08 ± 0,01	0,09 ± 0,01	0,09 ± 0,02
CV — коэффициент вариации, %	0,80 ± 0,02	0,60 ± 0,01**	0,80 ± 0,03	0,65 ± 0,02**
ВР — вариационный размах, с	0,63 ± 0,07	0,49 ± 0,07	0,74 ± 0,04	0,50 ± 0,06**
ИВР — индекс вегетативного равновесия, у.е.	84,5 ± 12,8	128,8 ± 21,1*	46,5 ± 5,3##	95,9 ± 17,8**
ВПР — вегетативный показатель ритма, у.е.	3,08 ± 0,54	4,70 ± 0,73*	1,80 ± 0,13#	4,05 ± 0,65**
ИН — индекс напряжения регуляторных систем, у.е.	53,8 ± 8,7	110,2 ± 20,4**	30,0 ± 3,89##	88,7 ± 19,14**
ПАПР — показатель адекватности процессов регуляции, у.е.	47,3 ± 4,36	69,5 ± 5,29**	41,5 ± 3,88	67,1 ± 7,37**

Примечание: \* —  $p < 0,05$ , \*\* —  $p < 0,01$  внутри групп; # —  $p < 0,05$ , ## —  $p < 0,01$  между группами.

Оценка частоты сокращений сердца в покое указывает на то, что в обеих группах наблюдается нормокардия. Показатели моды (Мо) и математического ожидания (М) приблизительно равны, что свидетельствует о хорошей стационарности процессов регуляции сердечной деятельности как у экстравертов, так и у интровертов. При этом выявленные величины индекса вегетативного равновесия (ИВР) совместно с индексом напряжения регуляторных систем (ИН) характеризуют вегетативное равновесие в группе экстравертов; достоверно

более низкое значение данных индексов у интровертов указывает на умеренное преобладание парасимпатического отдела в регуляции ритма сердца.

Известно также, что чем меньше вегетативный показатель ритма (ВПР), тем больше вегетативный баланс смещен в парасимпатическую сторону. В состоянии покоя ВПР в 1,7 раза ниже у интровертов ( $p < 0,05$ ), что подтверждает наличие смещения вегетативного баланса в парасимпатическую сторону в данной группе.

Обнаруженное в обеих группах достоверное повышение частоты сердечных сокращений при смене положения тела отражает адекватную активацию симпатического отдела нервной системы. Показатель моды ( $M_0$ ) и показатель математического ожидания ( $M$ ) приблизительно равны, что свидетельствует о хорошей стационарности процесса как у экстравертов, так и у интровертов при проведении ортостатической пробы.

Показатель адекватности процессов регуляции (ПАПР) отражает соответствие между активностью симпатического отдела вегетативной нервной системы и ведущим уровнем функционирования синоатриального узла. Данный показатель достоверно увеличивается при проведении ортостатической пробы в обеих группах, что указывает на соответствие между активностью симпатического отдела вегетативной нервной системы и ведущим уровнем функционирования синусового узла.

Смещение ВПР и ИН в большую сторону при ортостатической пробе достоверно зафиксировано в обеих группах, что характеризует реакцию организма на нагрузку [7].

Установлено, что показатель моды ( $M_0$ ) достоверно снижается в обеих группах студентов при функциональной пробе, в то время как показатель амплитуды моды ( $AM_0$ ) достоверно повышается лишь в группе интровертов, что указывает на более высокую тоническую активность и более низкую реактивность эрготропных структур вегетативной нервной системы.

Также было обнаружено значимое снижение показателя математического ожидания ( $M$ ) у всех обследуемых при ортостатической пробе, достоверно менее выраженное у интровертов. Данный факт подтверждает, что у экстравертов симпатический отдел оказывает более выраженное влияние на ритм сердца, чем у интровертов.

Таким образом, уровень экстраверсии—интроверсии в определенной степени приурочен к определенному вегетативному статусу. Комплекс выявленных параметров variability ритма сердца в покое и при функциональной пробе позволяет полагать, что экстраверты относятся к нормотоникам, а интроверты — к ваготоникам. Вариант регуляции ритма сердца с преобладанием активности парасимпатического отдела вегетативной нервной системы в покое отражает высокую функциональную устойчивость и высокие адаптационные возможности [4, 9] интровертов. Подобный тип регуляции выявлен у курсантов [1] и является значимым для профессионального отбора по ряду профессий, связанных с постоянным стрессом [3], что может быть важно и в условиях вузовского обучения.

### Выводы

1. Уровень экстраверсии—интроверсии определяет различия в ряде психофизиологических показателей студентов: более высокая эмоциональная устойчивость, сила основных нервных процессов и преобладание процессов возбуждения характерны для экстравертов.

2. Анализ variability ритма сердца свидетельствует о вегетативном равновесии у экстравертов и о преобладании парасимпатического отдела у интровертов, что можно рассматривать как показатель адаптационных резервов организма.

### Библиографический список

1. *Гавришева Н. В., Кормилицына Н. К.* Взаимосвязь показателей церебральной гемодинамики и variability сердечного ритма у курсантов // *Инновационная наука в глобализующемся мире : материалы Международной научно-практической конференции.* Уфа : РИО ИЦИПТ, 2014. С. 3—6.
2. *Грибкова Е. С., Кормилицына Н. К.* Показатели физиологических систем в условиях адаптации к обучению у студенток-бакалавров // *Инновационное развитие современной науки.* Уфа : Аэтерна, 2015. Ч. 2. С. 38—40.
3. *Кормилицына Н. К., Гавришева Н. В.* Показатели variability сердечного ритма и гемодинамики мозга, значимые для профессионального отбора специалистов экстремального профиля // *Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки.* 2015. № 1. С. 19—22.
4. *Королёва С. В.* Функциональная устойчивость как объективный интегральный показатель состояния пожарных // «Проблемы и перспективы современной науки» с материалами шестой Международной Телеконференции «Фундаментальные науки и практика» : сборник научных трудов. 2011. Т. 3, № 1. С. 27—33.
5. *Криштон В. В., Грибкова Е. С., Кормилицына Н. К.* Кластерный анализ показателей сердечно-сосудистой системы как способ выявления адаптационных стратегий к экзаменационному стрессу бакалавров ИвГУ // *Наука. Инновации. Технологии : научный журнал Северо-Кавказского федерального университета.* Ставрополь, 2015. Вып. 3. С. 121—130.
6. *Криштон В. В., Грибкова Е. С., Кормилицына Н. К.* Корреляционно-регрессионный анализ показателей сердечно-сосудистой системы обучающихся ИвГУ при прохождении промежуточного экзаменационного контроля // *Научный медицинский вестник.* Тамбов : Консалтинговая компания Юком, 2015. № 1 (1). С. 23—28.
7. *Петров О. В., Лапкин М. М.* Динамика состояния вегетативной нервной системы и адаптационных резервов у больных ишемической болезнью сердца на постгоспитальном этапе реабилитации // *Вестник новых медицинских технологий.* 2003. № 1—2. С. 34—35.
8. *Поборский А. Н.* Вегетативная регуляция и умственная работоспособность у детей в процессе обучения в неблагоприятных климатических условиях Среднего Приобья // *Физиология человека.* 2000. Т. 26, № 5. С. 128—136.
9. *Попова Е. А., Кормилицына Н. К.* Выявление ранних признаков дезадаптивных расстройств у специалистов экстремального профиля различных групп профпригодности // *Наука и технологии в современном обществе : материалы Международной научно-практической конференции.* Уфа : РИО ИЦИПТ, 2014. С. 7—11.

УДК 579.64

В. А. Курючкин, Е. В. Рудакова

## КЛЕТОЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ГЕМОЛИМФЫ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ СИНАНТРОПНЫХ МУХ И ШМЕЛЕЙ, ХАРАКТЕРИСТИКА ГЕМОЦИТАРНОЙ ФОРМУЛЫ

Акцентируется внимание на необходимость всестороннего изучения клеточных элементов представителей класса насекомых. Описываются методы их энтомологического, иммунологического и статистического изучения. Представлены классификации кластеров клеток гемолимфы насекомых на основе электронной и световой микроскопии. Проводится сравнительная характеристика клеточных элементов гемолимфы насекомых на примере некоторых видов синантропных мух и шмелей. Анализируются различия в соотношении клеток гемоцитов в структуре гемоцитарных формул мух и шмелей. Эти исследования могут быть основой для регулирования как полезных, так и вредных видов.

**Ключевые слова:** гемолимфа, насекомые, синантропные мухи, шмель, прогемоцит, плазмоцит, фагоцит, энцоитоид.

This article focuses on the need for a comprehensive study of the cellular elements of the representatives of the class of insects. In article describes the methods of their entomological, immunological and statistical study. The classification on the basis of electron and light microscopy clusters hemolymph of insect cells. The comparative characteristic of the cellular elements of insect hemolymph by the example of some species of synanthropic flies and bumblebees. Analyzes the differences in the ratio of hemocyte cells in the structure formulas gemotsitarnyh flies and bumblebees. These studies may provide a basis for regulation of both useful and harmful kinds.

**Key words:** hemolymph, insects, synanthropic flies, bumblebee, progemotsit, plasma cell, phagocytosis, endocytosis.

Насекомые уже давно стали неотъемлемой частью антропогенных ландшафтов. Так, имаго и особенно личинки синантропных мух выступают в качестве деструкторов органики [24]; данная их особенность может быть использована при переработке органических отходов [18]. Личинки некоторых синих и зеленых падальных мух применяются для санации гнойных ран и даже лечения, например, остеомиелита и гангрены [27]. Личинки мух широко используются в судебно-медицинской практике для установления сроков совершения преступления [28].

Однако основной акцент делается на оценке синантропных мух как паразитов и переносчиков инфекций человека и животных [23]. Некоторые виды мух являются облигатными назойливыми гематофагами [26], вызывающими стресс и значительно снижающими продуктивность сельскохозяйственных животных [22]. Кроме того они способны вызывать миазы, особенно у овец, при откладке яиц на раны, некротизированные ткани, а также в полости тела, например ротовую [25].



Все же наибольшее количество исследований посвящено мухам как переносчикам инфекционных заболеваний человека и животных. Фундаментальным трудом, обобщающим эти исследования, является двухтомная монография Бернарда Гринберга [23]. Этому направлению исследований посвящены и многие другие работы [6, 8, 9].

Синантропные мухи способны переносить условно-патогенную и патогенную микрофлору. Это стрептококки, представители группы кишечной палочки, возбудитель туберкулеза и многие другие инфекции [9].

В связи с вышеуказанным встает вопрос регуляции численности популяции мух. Одним из подходов к этому является изучение иммунитета насекомых с целью выявления наиболее уязвимого звена, например клеточного, в процессе онтогенеза мух [7].

Шмели, в отличие от мух, являются общественными насекомыми, при этом структура шмелиной семьи сложная, поэтому требуется всестороннее изучение всех каст семьи и применение шмелей *Bombus terrestris* в агропроизводстве [1, 13]. В связи с большой гибелью шмелиных маток и самок фуражиров актуальным является изучение иммунитета для массового круглогодичного лабораторного разведения данных перепончатокрылых [20, 29]. Но вместе с тем не до конца изучена реакция иммунной системы данных насекомых, в частности клеточного звена их иммунитета [14], что имеет большое значение с учетом высокой смертности шмелей при разведении, особенно при хранении.

Кроме того, в природе существует большое количество видов шмелей, численность которых, а следовательно, доступность для разведения выше, чем у данного вида [15]. Поэтому необходим мониторинг напряженности клеточного иммунитета данных насекомых в естественных условиях обитания перепончатокрылых для выявления более устойчивых к паразитам видов и введения их в культуру [17].

В последнее время создаются научные предпосылки регуляции численности насекомых при изучении иммунитета и его модулировании. Если в 80—90 гг. XX в. акцент делался на клеточное звено [5, 19], то в настоящее время появляется все больше работ по гуморальному иммунитету [4, 21].

Отлов шмелей производился с помощью пинцета вблизи шмелиных гнезд либо с цветков, а мух — в животноводческих помещениях с последующим установлением видового состава отловленных насекомых посредством определителя насекомых [12]. Затем в специальных сатках в течение суток идет подкормка 1 %-м сахарным бульоном шмелей и мух для увеличения объема гемолимфы. В дальнейшем насекомые наркотизировались серным эфиром, декапитировались и с помощью микрокапилляра объемом 0,5 мкл отбиралось 0,25 мкл гемолимфы. Она помещалась в лунку с таким же объемом забуференного физиологического раствора (ЗФР) и помещалась на 30 мин в термостат при температуре 37 °С. Вслед за этим резким движением руки физиологический раствор извлекался из лунки, куда помещалась свежая порция ЗФР или раствор Хенкса. Далее клетки ресуспендировались и в объеме 0,25 мкл помещались на предметное стекло, на котором делался мазок гемолимфы, окрашиваемый в последующем либо по Браше, либо с помощью модифицированной методики по Граму.

Мазок помещался в лунку с физиологическим раствором и распределялся при помощи стеклянной пипетки на поверхности предметного стекла с дальнейшим подсушиванием высоко над пламенем горелки. Производилось

окрашивание фуксином в течение 3 мин. Данный краситель соединяется с кислым содержимым ядра и формирует комплекс «краситель с нуклеиновой кислотой», который закрепляется при помощи раствора Люголя в течение 1—2 мин. Так ядро приобретает красный оттенок. Далее промывали водой после дифференциации в этиловом спирте, способствующем удалению фуксина из цитоплазмы клетки. Цитоплазма становится бесцветной и докрашивается красителем кристаллвиолетом или метиленовой синью. Через 2—3 мин краситель смывался водой. Под действием данного красителя цитоплазма окрашивается в голубой цвет. Полученный мазок высушивался на воздухе для дальнейшего микроскопирования, при котором происходили определение клеточных форм гемолимфы и подсчет их кластеров.

Применялась электронная микроскопия для выявления гемоцитарной формулы и форменных элементов мух [7] и световая микроскопия — шмелей [2, 13—17]. Электронная микроскопия осуществлялась с помощью сканирующего микроскопа. В качестве подложки применялась медная сетка-пластинка, в роли фиксатора использовались глутаровый альдегид, напыление с помощью платины. Напряжение на аноде составляло 60 кВ [11].

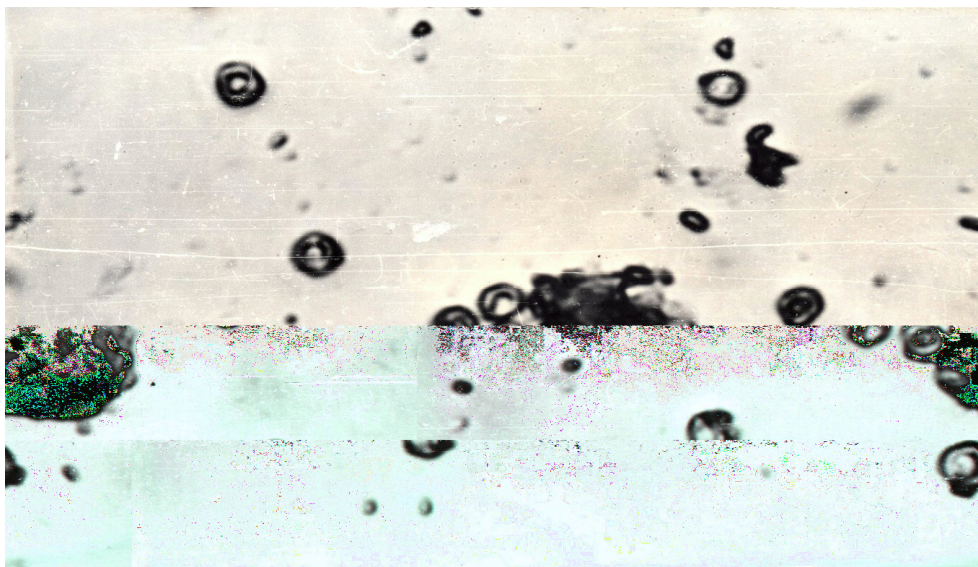
Данные, полученные в ходе исследования, далее подвергались различной статистической обработке [10].

По мнению А. А. Заварзина [3] все клеточные элементы подразделяются на три типа: веретенчатые, округлые и эозинофильные. У веретенчатых клеток цитоплазма базофильная, такие клетки фагоцитируют и способны превращаться в клетки округлой формы. Округлые клетки не способны изменять свою форму, их цитоплазма имеет едва различимую зернистость. Эозинофильные клетки овальной формы, они несколько уплощены, имеют малый размер, их зернистость равномерная. Округлые и эозинофильные клетки не приспособлены к фагоцитозу.

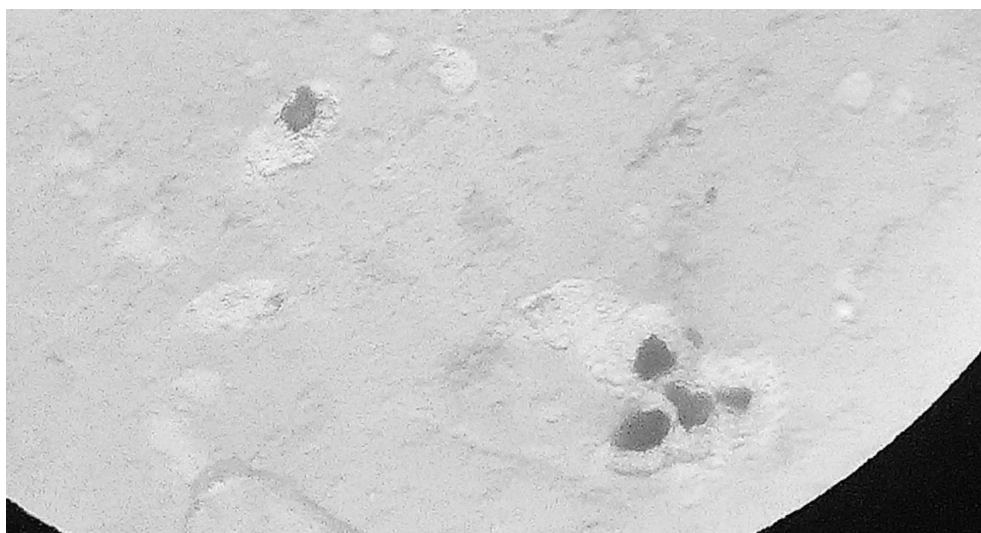
В данной работе мы опирались на иную классификацию [7], основанную на изучении гемолимфы мух в ходе ее микроскопирования с предварительным окрашиванием по модифицированному методу Грама. Так, у синантропных мух были обнаружены 4 типа клеточных элементов гемолимфы: прогемоциты, плазмоциты, фагоциты и энцитойды.

Прогемоцит (пролейкоцит) является агранулярной клеткой. При анализе сканированного изображения прогемоцита видно, что поверхностная его структура зернистая и напоминает «шагреневую» кожу, т. е. поверхность цитоплазматической мембраны не гладкая, что является основой для адгезии различных агентов, в том числе антигенной природы, к ним относятся и эритроциты барана, что видно на рис. 1. При этом отмечается процесс розеткообразования. Следует также иметь в виду, что прогемоциты имеют разные размеры: мелкие, средние и крупные. Роль каждого из этих кластеров еще предстоит выяснить. Можно лишь предположить, что мелкие служат основой для размножения подобных клеток. Средние могут размножаться, образуя бласты. При этом в ходе бластотрансформации отчетливо видны хромосомы (рис. 2), в левом верхнем углу представлен зрелый плазмоцит. А из крупных, скорее всего, образуются плазмоциты, что видно на рис. 3. Вопрос о специфичности реагирования пролейкоцитов на разные антигены остается открытым.

В отличие от пролейкоцита плазмоцит — гранулярная клетка. Он приобретает вакуолизированный фистончатый край, в цитоплазме выявляются гранулы и вакуоли. Эти клетки способны формировать уроподии (рис. 4), которые взаимодействуют с чужеродными антигенами (в данном случае с эритроцитами мыши).



*Рис. 1.* Прогемоцит (увеличение 20 000)



*Рис. 2.* Бласттрансформация плазмоцитов (увеличение 10 000)

Макрофаги — агранулярные, фагоцитирующие клетки, которые в неактивированном состоянии выглядят, как так называемые веретеновидные клетки, что сходно с литературными источниками (рис. 5) [3]. При взаимодействии с антигеном происходит инвагинация цитоплазмы на месте контакта с антигеном, клетка увеличивается в размере (рис. 6). А прореагировавшая с антигеном превращается в очень крупную клетку с большим количеством лизосом и многочисленными псевдоподиями (рис. 7). На поверхности клетки вверху слева виден поглощаемый эритроцит. Источником происхождения макрофагов, скорее всего, являются плазмоциты, но, возможно, это отдельная самостоятельная ветвь пролейкоцитов.

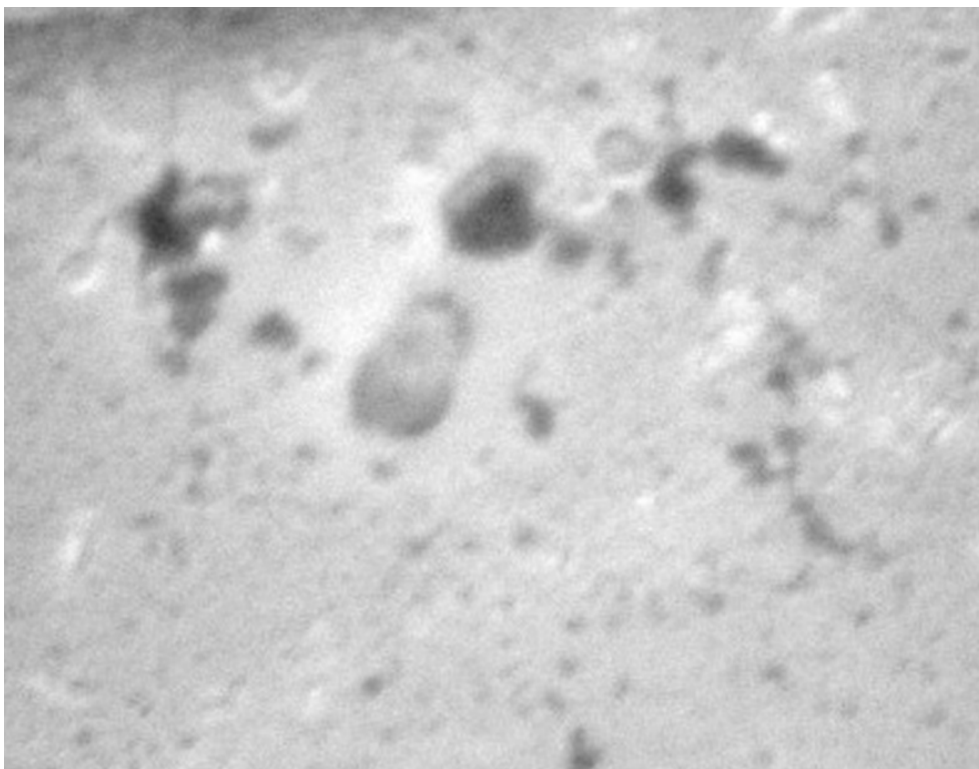


Рис. 3. Образование плазмодитов (увеличение 8 000)

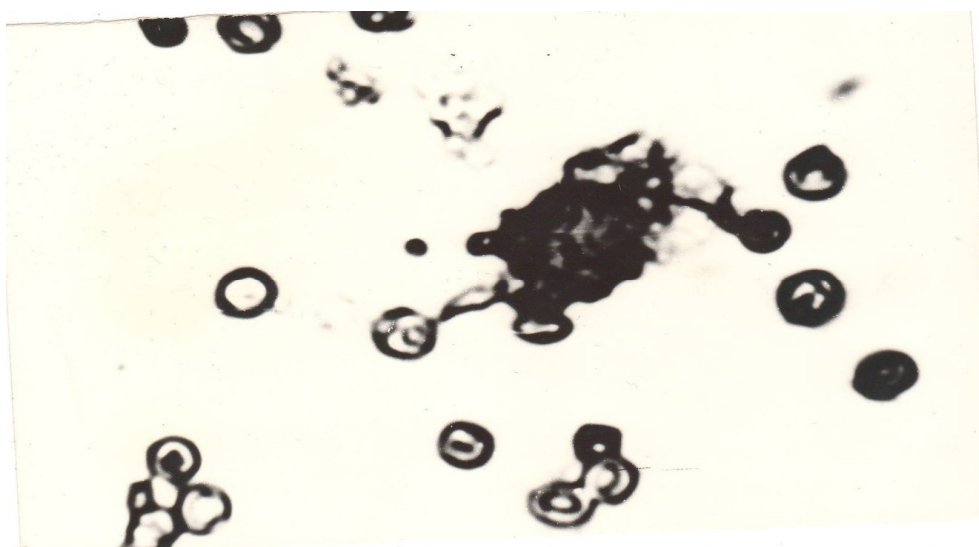


Рис. 4. Плазмодит (увеличение 20 000)

Эноцитойды (рис. 8) — гранулярные крупные клетки, происхождение которых еще не вполне ясно. Некоторые исследователи полагают, что это дегенерирующие макрофаги. Они напоминают ретикулоциты, их поверхность плоская, поскольку практически не обнаруживают адгезивных возможностей. В проведенных опытах эритроциты барана и мыши практически не адгезировались на их цитоплазматической мембране. В цитоплазме этих клеточных элементов обнаруживались многочисленные лентовидные митохондрии и гранулы. Эти клетки, по данным многих авторов [19], локализуются, как правило, в гемолимфе, окружающей дыхальца и трахеи у мух, а также воздушные мешки у шмелей. Все это позволяет высказать предположение, что они участвуют в окислительно-восстановительных реакциях, которые связаны с летной активностью насекомых, требующей много энергии. Вопрос о происхождении этих клеток требует дальнейшего изучения, в частности, планируется сравнение соотношения форменных элементов, взятых вместе с гемолимфой из перикардальной области и миксоцеля (гемоцель). Если окажется, что в перикардальной области они отсутствуют, значит, являются самостоятельным первоисточником.

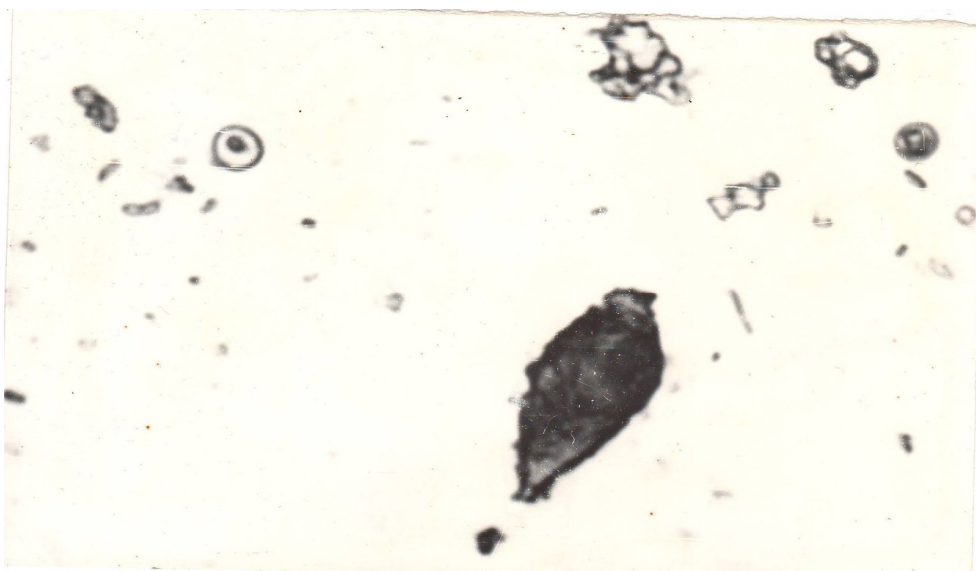


Рис. 5. Веретенновидная клетка (увеличение 20 000)

При сравнении вышеуказанных подходов в описании клеток, составляющих гемолимфу представителей класса «насекомые», можно отметить сходство между веретенчатыми клетками и макрофагами, овальными клетками и плазмочитами, а прогемоциты аналогичны базофильным клеткам, так как в обоих случаях остальные типы клеток происходят от них.

Органом кроветворения у насекомых, в частности у мух и шмелей, является так называемая перикардальная сумка (остатки вторичной полости тела), которая окутывает так называемое сердце — брюшной кровеносный сосуд, расположенный на дорсальной стороне брюшка. Из перикардального пространства все сформировавшиеся гемоциты поступают в гемоцель, которая фактически является уже смешанной полостью тела (миксоцелем).

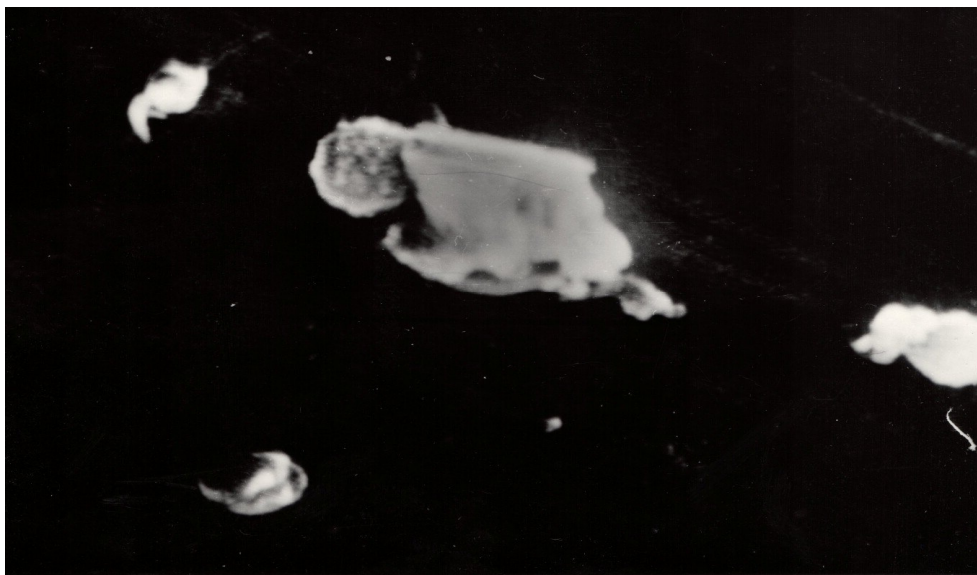


Рис. 6. Макрофаг (увеличение 20 000)



Рис. 7. Макрофаг с многочисленными псевдоподиями (увеличение 20 000)

Кроме того, у некоторых видов насекомых имеются и иные типы клеток, к ним относятся сфероциты, клетки жирового тела и дегенеративные формы [19]. На сегодняшний день функции их недостаточно изучены.

Следует обратить внимание на тот факт, что существует значительное сходство клеточных элементов у всех представителей насекомых [3], поэтому мы можем сравнивать кластеры гемолимфы у представителей родов мух и шмелей.

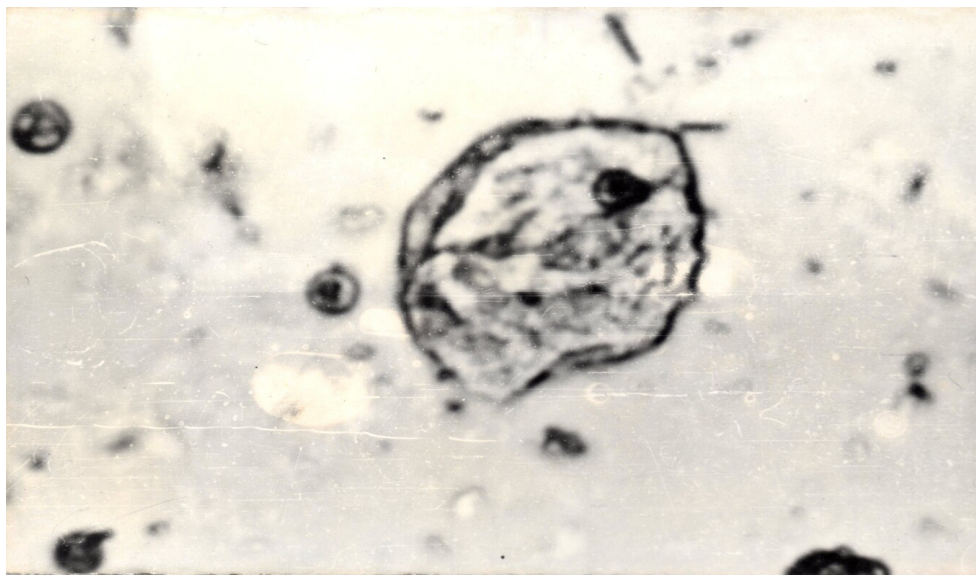


Рис. 8. Эноцитоид (Увеличение 20 000)

## Гемоцитарная формула некоторых видов мух и шмелей

Виды насекомых	Типы клеток			
	прогемоциты	плазмоциты	фагоциты	эноцитоиды
Виды мух				
<i>St. calcitrans</i>	46,6	18,6	23,0	11,8
<i>M. domestica</i>	39,6	23,8	26,6	10,0
<i>M. autumnalis</i>	35,2	23,2	26,0	15,6
<i>C. vicina</i>	39,2	23,2	36,6	1,0
<i>C. uralensis</i>	39,8	23,3	35,9	1,0
<i>P. terraenova</i>	40,0	23,2	35,6	1,2
Виды шмелей				
<i>B. hortorum</i>	17,6	19,1	35,6	27,7
<i>B. lapidarius</i>	17,9	19,1	35,7	27,3
<i>B. lucorum</i>	17,3	18,7	36,9	27,1
<i>B. pascuorum</i>	17,6	19,2	36,1	27,1
<i>B. sylvorum</i>	17,6	18,9	36,2	27,3
<i>B. terrestris</i>	17,6	19,2	36,1	27,1
<i>B. (Psithyrus) rupestris</i>	17,1	16,2	40,1	26,6

В таблице заметно определенное сходство в гемоцитарной формуле шмелей и мух. Это касается прежде всего суммарного количества фагоцитирующих клеток (плазмциты и фагоциты), что понятно, поскольку гемолимфа мух и шмелей не является стерильной, в ней могут находиться многочисленные организмы (нематода *Sphaerularia bombi Dufour*, личинки мух семейства *Conopidae*, клещ *Locustacarus buchneri (Bombacarus buchneri)*), а также микроорганизмы, на которые реагируют данные виды клеток. Обращает на себя внимание значительно меньшее количество прогемоцитов шмелей, что может быть связано как с характером питания, так и с возрастом насекомых. Это требует дальнейшего анализа. У шмелей субдоминантным кластером клеток гемолимфы являются эноцитойды, что может быть связано с повышенной летной активностью, кроме того, у них имеются так называемые «легочные мешки». Эти клетки содержат большое количество митохондрий и гранул с окислительно-восстановительными ферментами, которые необходимы для большого количества энергетических затрат во время перелета.

Исследования в области клеточного иммунитета чрезвычайно перспективны, в особенности это касается как процессов гемопоэза, так и специфичности иммунитета со стороны разных клеток, в особенности пролейкоцитов.

#### Библиографический список

1. *Ащеулов В. И.* Шмели — опылители сельскохозяйственных растений в теплицах : монография. Иваново, 2001. 233 с.
2. *Бесшапошникова А. Г., Курючкин В. А.* О гемоцитарной формуле шмелей // Борисовский сборник. Вып. 5 / отв. ред. В. В. Возилов. Иваново : Референт, 2014. С. 160—162.
3. *Заварзин А. А.* Избранные труды. М., 1953. Т. 4. 718 с.
4. *Кругликова А. А.* Антимикробные факторы в контроле внешней и внутренней среды мясной мухи (Diptera, Calliphoridae) : автореф. дис. ... канд. биол. наук (03.02.05). СПб., 2014. 11 с.
5. *Купер Э.* Сравнительная энтомология. М. : Мир, 1980. С. 422—425.
6. *Курючкин В. А.* Микрофлора мух разных экологических групп // Двукрылые насекомые и их значение в сельском хозяйстве. Л., 1987. С. 60—62.
7. *Курючкин В. А., Пивоваров М. А., Ивакина И. В., Морева Ж. Г.* Морфофункциональные особенности гемоцитов и их изменения у некоторых видов синантропных мух первого физиологического возраста // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. № 3. С. 18—25.
8. *Курючкин В. А.* Синэкологические связи мух с микроорганизмами в экосистемах животноводческих ферм // Двукрылые фауны СССР и их роль в экосистемах. Л., 1984. С. 66—68.
9. *Курючкин В. А., Седов В. И.* Энтерококковая флора некоторых видов синантропных мух // Журнал микробиологии, эпидемиологии и иммунобиологии. 1979. № 4. С. 81—84.
10. *Лакин Г. Ф.* Биометрия : учебник для вузов. 4-е изд. М. : Высш. шк., 1990. 352 с.
11. *Методы общей бактериологии* : пер. с англ. / под ред. Ф. Герхардта и др. М. : Мир, 1983. 536 с.
12. *Определитель насекомых Европейской части СССР.* Т. 5, ч. 2. Л. : Наука, 1970. 945 с.



13. Рудакова Е. В., Курючкин В. А. Изменения клеточного состава гемолимфы шмелей в процессе календарного возраста // Борисовский сборник. Вып. 7 / отв. ред. В. В. Возилов. Иваново : Референт, 2016. С. 251—254.
14. Смирнова Е. В. Количественные соотношения гемоцитов инвазированных и неинвазированных паразитами шмелей // Молодая наука в классическом университете : тезисы докладов научных конференций фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых. Иваново, 21—25 апреля, 2014 г. : в 7 ч. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2014. Ч. 1. С. 119—120.
15. Смирнова Е. В., Курючкин В. А. О паразитарных заболеваниях некоторых видов шмелей города Иваново // Борисовский сборник. Вып. 5 / отв. ред. В. В. Возилов. Иваново : Референт, 2014. С. 191—194.
16. Смирнова Е. В., Курючкин В. А. О паразитофауне шмелей городов Иваново и Вичуга Ивановской области // Экологические проблемы и пути их решения: естественнонаучные и социокультурные аспекты : сборник статей по материалам молодежной межрегиональной научно-практической конференции студентов, магистрантов и аспирантов. Н. Новгород : НГПУ им. К. Минина, 2014. С. 42—45.
17. Смирнова Е. В. Суточная и сезонная активность инвазированных шмелей // Молодая наука в классическом университете : тезисы докладов научных конференций фестиваля студентов, аспирантов и молодых ученых. Иваново, 20—24 апреля, 2015 г. : в 7 ч. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2015. Ч. 1. С. 118—119.
18. Тамирина Н. А. Основы технической энтомологии. М. : МГУ, 1990. 202 с.
19. Флоренсов В. А., Чистова И. М. Насекомые // Очерки эволюционной иммунологии. Иркутск : изд-во Иркутского ун-та, 1990. 245 с.
20. Чупин С. А., Курючкин В. А., Качкин М. В., Пономарев В. А. Клеточный иммунитет шмелей // Пчеловодство : массово-производственный журнал. Вып. 8 / под ред. И. Ю. Верещака. М., 2000. С. 60—61.
21. Яковлев А. Ю. Физиологические основы регуляции синтеза антимикробных пептидов у Diptera, Calliphoridae на клеточном и организменном уровне : автореф. дис. ... канд. биол. наук (03.02.05). СПб., 2014. 13 с.
22. Berry J. L., Stage D. A., Campbell J. B. Populations and economic impacts of stable flies in cattle // Trans. ASAE. 1983. Vol. 26, № 3.
23. Greenberg B. Flies and disease. N. Y., 1976. Vol. 2. P. 17—54.
24. Marchenko N. I. New point of view on epidemical signifacance of flies // 2-nd Int. Congr. Dipteral. Bratislava, 1990. № 27. P. 103—106.
25. Merino F. J., Campos Angel, Nebreda Teresa et al. Miasis cutanea por Sarcophaga sp. // Enferm. infecc. y microbiol. Clin. 2000. 18, № 1. P. 19—21.
26. Schwinghammer K. A., Knapp F. W., Boling J. A. Physiological and nutritional response of beef steers to infestations of the horn fly (Diptera: Muscidae) // J. Econ. Entomol. 1986. Vol. 79, № 4. P. 1010—1015.
27. Sherman R. A., Pechter E. A. Maggot therapy: A review of the therapeutic applications of fly larvae in human medicine, especially for treating osteomyelitis // Med. and Vet. Entomol. 1988. Vol. 2. № 3. P. 225.
28. Singh D., Greenberg B. Survival after submergence in the pupae of five species of blow flies (Diptera: Calliphoridae) // J. med. Entomol. 1994. 31, № 5. P. 757—759.

УДК 582.285.2

Л. Ю. Минеева, О. Е. Фомина

**РЖАВЧИННЫЕ ГРИБЫ НА ЛЕКАРСТВЕННЫХ РАСТЕНИЯХ  
ТЕРРИТОРИИ БОТАНИЧЕСКОГО САДА И ДЕНДРАРИЯ ИВГУ**

На территории ботанического сада и дендрария ИвГУ обнаружено 26 видов лекарственных растений с признаками поражения ржавчинными грибами. В результате проведенной работы было выявлено 23 вида ржавчинных грибов, принадлежащим к 10 родам, относящимся к 2 семействам — *Pucciniaceae* и *Melampsoraceae*.

**Ключевые слова:** ботанический сад, лекарственные растения, ржавчинные грибы, облигатные паразиты, растение-хозяин.

26 species of medicinal plants with signs of rust fungi were revealed in the territory of the Botanical garden and arboretum of Ivanovo State University. As a result of the work 23 species of rust fungi belonging to 10 genera from two families — *Pucciniaceae* and *Melampsoraceae* were identified.

**Key words:** botanical garden, medicinal plants, rust fungi, obligate parasites, host plant.

В самых ранних письменных памятниках культуры мы находим разнообразные указания на применение растений как лекарственных средств. Эти указания охватывают обширную группу растений и свидетельствуют о том, что человек еще в глубокой древности обладал значительным запасом сведений о лекарственных свойствах растений и широко использовал их.

В процессе многолетнего интродукционного эксперимента большинство видов в условиях культуры хорошо растут и развиваются, дают полноценные семена, многие из них возобновляются самосевом, что свидетельствует об их высоких адаптационных возможностях [2]. Помимо выращиваемых в культуре лекарственных растений, существует множество дикорастущих видов, сбор которых производится в их естественных условиях обитания. Актуальным становится вопрос о качестве собранного сырья. Очень важно, чтобы лекарственные растения были «здоровы», т. е. не имели признаков поражения фитопатогенными грибами, в частности ржавчиной. Заселяя органы растения, особенно во влажную погоду, ржавчинные грибы выделяют в них продукты жизнедеятельности, которые нередко оказываются токсичными для человека. Следовательно, лекарственные растения с признаками поражения ржавчиной не пригодны для сбора и заготовки сырья.

Очевидна необходимость изучения лекарственных растений не только на предмет их целебных свойств, но и для более детального исследования особенностей фитопатологического состояния лекарственного сырья. Цель нашей работы — обобщить и проанализировать новый и ранее собранный фитопатологический материал по признаку принадлежности к лекарственным растениям. Основными задачами было: определить виды ржавчинных патогенов; выяснить, какие из родов грибов являются наиболее распространенными; определить наиболее широко представленное семейство; рассмотреть органотропную специализацию паразитов.

---

© Минеева Л. Ю., Фомина О. Е., 2016

• Серия «Естественные, общественные науки»

В ботаническом саду ИвГУ одним из специализированных участков является «Аптекарский огород». Экспозиция создавалась в целях изучения разнообразия лекарственных растений, их размножения, разведения и обеспечения семенами и посадочным материалом [1] ботанического сада ИвГУ, а также пришкольных участков города Иванова, участка лекарственных растений Ивановского фармацевтического колледжа и других организаций. По итогам изучения видового разнообразия «Аптекарского огорода» на 2010 г. экспозицию представляли 22 вида высших сосудистых растений, относящихся к девяти семействам [1]. К 2016 г. коллекция лекарственных растений насчитывает уже 56 видов, принадлежащих к 19 семействам [4]. Помимо растений, представленных в культуре в экспозиции, на территории ботанического сада имеется множество дикорастущих лекарственных растений. Кроме того, «Аптекарский огород» является важным элементом учебных и обзорных экскурсий по ботаническому саду ИвГУ, поэтому нуждается в тщательном уходе и поддержании растений в здоровом состоянии.

Проанализировав полный список растений, пораженных ржавчинными грибами и собранных в период с 2010 по 2015 г., выделили растения с лекарственными свойствами. В списке значатся 26 видов, выявленных на территории ботанического сада и дендрария. Кроме культурных лекарственных растений, расположенных в «Аптекарском огороде», мы учитывали дикорастущие травы, деревья и кустарники.

#### Список видов ржавчинных грибов на растениях-хозяевах

На деревьях:

*Cronartium ribicola* I.C. Fisch на *Pinus sylvestris* L.  
*Gymnosporangium juniperi* Link. на *Sorbus aucuparia* L.  
*Melampsora salicina* Lev. на *Salix caprea* L.  
*Melampsora salicina* Lev. на *Salix aurita* L.  
*Melampsoridium betulinum* Kleb. на *Betula pendula* L.  
*Tranzschelia pruni-spinosae* Pers. на *Prunus spinosa* L.

На кустарниках:

*Cronartium ribicola* I.C. Fisch на *Ribes nigrum* L.  
*Cummininsiella sanguine* Peck. на *Mahonia aquifolium* Nutt.  
*Gymnosporangium juniperi* Link. на *Juniperus communis* L.  
*Phragmidium rosae rugosae* Kasai. на *Rosa rugosa* Thunb.  
*Phragmidium tuberculatum* J.Mull. на *Rosa majalis* L.  
*Puccinia coronata* Corda. на *Frangula alnus* Mill.  
*Puccinia graminis* Pers. на *Berberis vulgaris* L.

На травянистых растениях:

*Coleosporium cirsii-japonici* Diet. на *Urtica dioica* L.  
*Coleosporium inulae* Rab. на *Inula helenium* L.  
*Melampsora allii-salicis albae* Kleb. на *Allium ursinum* L.  
*Puccinia digraphidis* Soppitt. на *Convallaria majalis* L.  
*Puccinia graminis* на *Elytrigia repens* (L.) Nevski  
*Puccinia malvacearum* Mont. на *Malva alcea* L.  
*Puccinia menthae* Pers. на *Mentha piperita* L.

*Puccinia poarum* Niels на *Tussilago farfara* L.

*Puccinia* sp. на *Levisticum officinale* Koch

*Puccinia variabilis* Grew. на *Taraxacum officinale* L.

*Uromyces acetosae* Schroet. на *Rumex acetosa* L.

*Uromyces ambguusii* (DC.) Lev. Wint. на *Allium schoenoprasum* L.

*Uromyces geranii* Lev. на *Geranium pretense* L.

Определяя жизненные формы растений-хозяев (рис. 1), выяснили, что преобладают травы — 13 видов (50 % от числа пораженных лекарственных растений), кустарники представлены 7 видами (27 %), деревья — 6 видами (23 %).

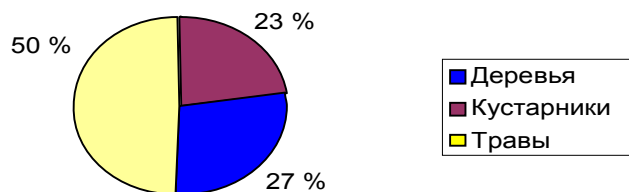


Рис. 1. Анализ лекарственных растений по жизненным формам

Проанализировав семейственную принадлежность ржавчинных грибов (рис. 2), установили, что более многочисленно и разнообразно семейство *Pucciniaceae*, представители которого паразитируют на 18 видах лекарственных растений различных жизненных форм, что составляет 69 % от числа зараженных видов. Помимо того, грибы семейства *Pucciniaceae* имеют различные типы циклов развития, что способствует их приспособлению и устойчивости к неблагоприятным факторам окружающей среды. Грибы семейства *Melampsoraceae* обнаружены на 8 видах лекарственных растений, что составляет 31 % от числа зараженных видов.

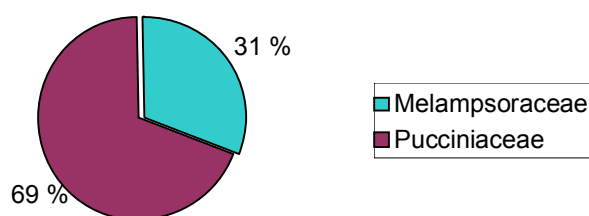


Рис. 2. Соотношение между семействами ржавчинных грибов

Рассмотрев соотношение между родами ржавчинных грибов (рис. 3), выявили, что самым многочисленным является род *Puccinia*, который представлен 9 видами; 3 вида представляют род *Uromyces*. Роды *Melampsora*, *Phragmidium*, *Coleosporium* насчитывают по 2 вида. По одному виду — в родах *Gymnosporangium*, *Tranzschelia*, *Melampsoridium*, *Cronartium*, *Cumminsiiella*. Можно отметить, что оба самых распространенных рода принадлежат к семейству *Pucciniaceae*.

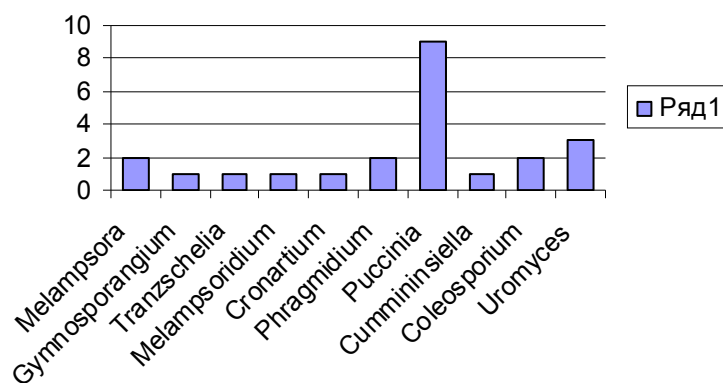


Рис. 3. Соотношение между родами ржавчинных грибов

Изучив органотропную специализацию выявленных ржавчинных грибов, обнаружили, что у большинства лекарственных растений поражаются листья, например у *Inula helenium* L., *Urtica dioica* L., *Tussilago farfara* L., *Berberis vulgaris* L., *Mentha piperita* L. и др. Реже — исключительно стебли и плоды, например: *Frangula alnus* Mill., *Prunus spinosa* L., *Berberis vulgaris* L. В фармакологии используют различные органы лекарственных растений. Необходимо учитывать, что зараженное растение нельзя применять в качестве сырья, даже если нет наглядных признаков поражения на используемых в лекарственных целях органах. Грибница у ржавчинных грибов хорошо развита, эндофитная, обильно ветвящаяся, распространяющаяся в межклетниках питающего растения. Обычно в тканях питающего растения грибница распространяется от места проникновения по радиусу на сравнительно небольшое расстояние. Такая грибница является однолетней, а само поражение называется местным. В других случаях грибница распространяется по всему растению, проникает в корневища, луковицы, ветви, где и перезимовывает, и тогда она называется диффузной, так как вызывает почти сплошное поражение растения [3].

В заключение можно сказать, что лекарственные растения с признаками поражения ржавчинными грибами не могут применяться в качестве сырья в фармакологии из-за содержания в них токсинов, выделяемых патогеном. Кроме того, важно защищать лекарственные растения от грибных болезней, так как часто заражение ведет к невозможности произвести пригодные для посева семена, а часто и к полной гибели. Поэтому мониторинг состояния лекарственных растений и заражения их ржавчиной на территории ботанического сада и дендрария ИвГУ в дальнейшем будет продолжен.

#### Библиографический список

1. Воронин Д. Н., Звонарева Ю. А., Кравченко М. Г., Момонт И. С. Формирование «Аптекарского огорода» ботанического сада ИвГУ // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. Иваново, 2010. Вып. 2. С. 21—25.
2. Землинский С. Е. Лекарственные растения СССР. М.: Изд-во Моск. о-ва испытателей природы, 1949. 356 с.
3. Купревич В. Ф., Ульянищев В. И. Определитель ржавчинных грибов СССР. Ч. 1. Мн., 1975. 426 с.
4. Минеева Л. Ю., Скворцова О. Е. Сведения о ржавчинных грибах ботанического сада ИвГУ // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. Иваново, 2013. Вып. 2. С. 33—34.

*Памяти Н. А. Шобанова (1958—2015)*

## **ПЕРВЫЙ ДОКТОР БИОЛОГИЧЕСКИХ НАУК**

В 2015 г. ушел из жизни выпускник нашего факультета Николай Александрович Шобанов, закончивший биолого-химический факультет ИвГУ в 1980 г. и в 2000 г. защитивший первым среди выпускников-биологов докторскую диссертацию.

Руководителем его научной работы в студенческие годы был замечательный ученый — известный эколог Георгий Леонидович Шкорбатов. Учеба Н. А. Шобанова в нашем университете проходила в период создания профессором Г. Л. Шкорбатовым кафедры зоологии и развития гидробиологического направления на биолого-химическом факультете. Широта и глубина интересов, высокий уровень научных исследований, прекрасные педагогические качества этого человека оказали большое влияние на выбор будущей специальности, формирование научных интересов и личности Н. А. Шобанова в студенческие годы.

Г. Л. Шкорбатов создал замечательный коллектив специалистов — преподавателей вуза, привлек на кафедру для специализации большую группу студентов-гидробиологов, среди которых оказался и Н. А. Шобанов, перед которым была поставлена задача изучения водных организмов — гидробионтов. Именно тогда на кафедре была заложена лаборатория гидрохимии и экспериментальной гидробиологии, организованы практики (морская — на Белом море и практика на пресноводных водоемах Ивановской области), установлены связи кафедры зоологии с Институтом биологии внутренних вод им. И. Д. Папанина (пос. Борок Ярославской области), где и проработал затем почти всю жизнь Н. А. Шобанов.

Г. Л. Шкорбатов читал в университете ряд общих и специальных курсов, которые были хорошо иллюстрированы и насыщены фактическим материалом, значительное внимание в своих курсах он уделял проблеме вида и видообразования, которая в дальнейшем стала одной из главных в работах Н. А. Шобанова. Через 20 лет после окончания вуза он писал в автореферате докторской диссертации: «Выполнению настоящей работы и своему становлению как исследователя я обязан ряду высококлассных специалистов, с которыми мне посчастливилось встречаться и сотрудничать. Мой интерес к эволюционной и экологической проблеме вида сформировался под влиянием моего научного руководителя в студенческие годы проф. Г. Л. Шкорбатова (Ивановский госуниверситет)».

После окончания вуза, за исключением короткого периода с сентября 1980 г. по март 1981 г., когда Н. А. Шобанов был инженером-агрохимиком на Ивановской областной станции химизации сельского хозяйства, с апреля 1981 г. до конца жизни он проработал в ИБВВ им. И. Д. Папанина РАН, с которым наш факультет все эти десятилетия развивает научное сотрудничество. Там он сформировался как ученый, прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего лабораторией биологии и систематики (с 2006 по 2015 г.), стал известным в нашей стране и за рубежом специалистом в области кариосистематики комаров-звонцов, имеющих научное название

«хириномиды». Личинки этих комаров известны каждому и называются в народе «мотыльем». Для биологов всего земного шара хирономиды представляют огромный экологический интерес как модель для наблюдения за состоянием биосферы, а для цитогенетиков, систематиков и эволюционистов они являются одним из уникальных объектов, на котором можно изучать политенные хромосомы и воочию наблюдать процессы эволюции и видообразования.

Главными научными интересами Н. А. Шобанова стали систематика, биология и эволюция хирономид, которым посвящены его научные работы со студенческих лет, кандидатская и докторская диссертации. Его формированию способствовали многие прекрасные отечественные и зарубежные ученые, которых он благодарил в своих работах. Назову хотя бы часть из тех, кто оказал на него большое влияние в годы работы в ИБВВ им. И. Д. Папанина РАН, способствовал выработке профессионализма, замечательных деловых и человеческих качеств, эрудиции и способности искать и находить новое в науке, что потом так притягивало к нему в пос. Борок студентов на практику, специалистов для консультаций, коллег и друзей на совещания и конференции.

Теория и практика зоосистематики осваивались им под руководством и в теснейшем сотрудничестве с прекрасным морфологом и систематиком по хирономидам А. И. Шиловой (ИБВВ РАН, Борок), до 1996 г. руководившей лабораторией систематики и морфологии, в которой хранилась прекрасная коллекция хирономид. Овладение кариологией, как он писал, «оказалось возможным благодаря многочисленным стажировкам и совместной работе с д-ром биол. наук Н. А. Петровой (ЗИН РАН, Санкт-Петербург), проф. И. И. Кикнадзе (ИЦиГ СО РАН, Новосибирск), канд. биол. наук С. Ю. Деминим и д-ром биол. наук Н. Б. Ильинской (ЦИН РАН, Санкт-Петербург)...». Наконец, первым оппонентом по докторской диссертации Н. А. Шобанова была Е. Б. Виноградова, выдающийся специалист, д-р биол. наук, профессор, ныне главный научный сотрудник ЗИН РАН, удостоенная в США премии имени Джона Белкина (John N. Belkin) за исследования по двукрылым насекомым.

В сводке «Кто есть кто: биоразнообразие. Россия и сопредельные регионы», вышедшей в 1997 г., основными направлениями деятельности Н. А. Шобанова названы кариология и систематика *Chironomidae* Европейской части России, сохранение коллекции хирономид\*.

Оценивая вклад Н. А. Шобанова в комплексное изучение видов рода *Chironomus*, выполненное в 80-90 гг. прошлого века, можно отметить, что его работы по кариофонам стали классикой, получили всеобщее признание в нашей стране и за рубежом, вошли в монографии, научные статьи и учебные издания, а опередившие свое время эволюционные модели, связывавшие экологию, гомеостаз и видообразование хирономид на хромосомном уровне, развиваются сейчас в ходе молекулярно-генетических исследований геномов.

Добрая память о Н. А. Шобанове, прекрасном ученом, замечательном наставнике молодежи останется на долгие годы. Этого высокого, энергичного, сильного человека, гостеприимно принимавшего всех, стремившихся попасть к нему в лабораторию, тогда, когда он был только младшим научным сотрудником и когда стал старшим научным сотрудником и заведующим, есть кому вспоминать и благодарить.

---

\* Кто есть кто: биоразнообразие. Россия и сопредельные регионы / под ред. Н. Н. Воронцова. М. : КМК Scientific Press, 1997. 674 с.

Среди тех, кто приезжал к нему учиться еще со студенческих лет, работал с ним, знал его, пользовался его советами, опытом, методами исследований теперь выросло немало кандидатов и докторов биологических наук.

Осенью 2015 г. он приезжал в Alma mater последний раз, а вскоре его уже не стало. Н. А. Шобанов прожил всего 57 лет. Но он был и останется для всех, кто его знал, оптимистом, человеком, готовым всегда помочь тем, кто бескорыстно искал истину в науке.

Зимой 2016 г. автор этих строк вспоминал о так рано ушедшем из жизни нашем выпускнике на научной сессии в ИвГУ. А в августе 2016 г. в Саратове на VI Международной конференции по кариосистематике беспозвоночных животных (KARYO-VI) была проведена школа для молодых ученых памяти Н. А. Шобанова.

***В. А. Исаев***

*доктор биологических наук,  
профессор кафедры общей биологии и физиологии*



УДК 541.128

*П. А. Калмыков, М. В. Клюев*

## СИНТЕЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ КАТАЛИЗАТОРОВ ГИДРОДЕГАЛОИДИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПАЛЛАДИЯ И НАНОАЛМАЗОВ

Синтезированы наноалмазы с содержанием палладия 0,5, 1 и 2 мас. %. Методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии определен качественный и количественный состав катализаторов, доказано закрепление палладия на поверхности наноалмазов. Образцы палладийсодержащих наноалмазов, а также 0,5 мас. % Pd/C изучены в модельных реакциях гидродегалогенирования хлорбензола, бромбензола и йодбензола в мягких условиях (органический растворитель, температура 318 К,  $P_{H_2} = 1$  атм). Показано, что все синтезированные палладийсодержащие катализаторы оказались активными в модельных реакциях гидродегалогенирования моногалогенбензолов в приведенных условиях.

**Ключевые слова:** наноалмазы, палладий, катализаторы гидродегалогенирования, энергодисперсионная рентгеновская спектроскопия, моногалогенбензолы.

Palladium containing nanodiamonds with a metal content of 0.5, 1 and 2 wt. % are synthesized. Qualitative and quantitative composition of the catalysts was defined by energy dispersive X-ray spectroscopy method, fixation of palladium on the surface of nanodiamonds was proved. Samples of palladium nanodiamonds and 0.5 wt. % Pd/C were studied in model reactions of hydrodehalogenation of chlorobenzene, bromobenzene and iodobenzene under mild conditions (organic solvent, the temperature of 318 K,  $P_{H_2} = 1$  atm). It is shown that all the synthesized palladium catalysts were active in the model reactions of hydrodehalogenation of mono-substituted halobenzene in the conditions pointed out.

**Key words:** nanodiamonds, palladium, hydrodehalogenation catalysts, energy-dispersive X-ray spectroscopy, mono-substituted halobenzene.

Галогенорганические соединения находят применение в различных областях деятельности человека. После использования этих веществ возникает необходимость их утилизации.

В настоящее время основными методами утилизации галогенорганических веществ является сжигание или захоронение [7], однако в случае сжигания порой образуются более опасные вещества, например диоксины [3],

---

© Калмыков П. А., Клюев М. В., 2016

*Работа выполнена при поддержке ФСР (конкурс У.М.Н.И.К. — 2014).*

а места захоронения со временем могут быть разрушены, тогда находящиеся в них химикаты попадут в воду, почву, воздух.

Альтернативный, экологически безопасный метод утилизации галогенорганики — каталитическое гидродегалогенирование (ГД) в присутствии катализаторов чаще всего на основе благородных металлов. Этот метод позволяет получить полезные продукты из галогенорганических отходов, однако его развитие сдерживается высокой стоимостью и низкой стабильностью имеющихся катализаторов. Для решения задачи могут быть использованы катализаторы на основе наноалмазов (НА). Данный носитель имеет уникальные свойства: высокую удельную поверхность, покров из функциональных групп, возможность модифицирования поверхности НА и, разумеется, физико-механические свойства алмаза (прежде всего высокую прочность и достаточно высокую термостойкость) [8].

Закрепление частиц металла на носителе может идти по нескольким путям, одним из которых является физическая адсорбция. Этот процесс характерен для катализаторов на основе активированного угля. Кроме того, закрепление частиц металла из раствора его предшественника может происходить в пористой структуре, свойственной таким носителям, как активированный уголь, оксид алюминия и др. В этом случае вероятен процесс закрепления частицы в поре, следствием чего является малая доступность активного центра для молекул субстрата. Другой, наиболее предпочтительный вид закрепления частиц металла — ковалентная адсорбция на поверхности носителя за счет образования химической связи с атомами поверхности (на дефектах кристаллической решетки) или расположенными на ней функциональными группами, в том числе специально введенными с целью закрепления металла. Атомы металла, закрепленные таким образом, не будут склонны к агломерации и не будут смываться с поверхности носителя в ходе каталитической реакции. В то же время практически все образованные таким способом металлоцентры доступны для молекул субстрата.

Поскольку в ходе синтеза НА используются высокая температура и давление, это способствует образованию на их поверхности различных функциональных групп и дефектов кристаллической решетки [9]. Следовательно, НА могут выступать хорошим носителем металлов, связывая их со своей поверхностью прочной ковалентной связью.

Целями настоящей работы являлись синтез катализаторов на основе НА и палладия с массовым содержанием металла 0.5, 1 и 2 мас. %, проведение качественного и количественного анализа катализаторов с помощью энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (EDX-анализ), а также тестирование полученных образцов палладийсодержащих НА в модельных реакциях ГД хлорбензола, бромбензола и йодбензола в мягких условиях (органический растворитель, температура 318 К,  $P_{H_2} = 1$  атм).

### Экспериментальная часть

**Приготовление образцов катализаторов.** В работе использовали детонационные НА марки RUDDM 0-500 нижегородской фирмы «Реал-Дзержинск». НА имели удельную поверхность  $320\text{—}350\text{ м}^2 \cdot \text{г}^{-1}$  (средний размер кристаллического алмазного ядра частиц НА около 6 нм) и суммарное содержание неуглеродных примесей не более 0.7 мас. %. Перед нанесением палладия суспензию 1 г НА в 100 мл воды предварительно обрабатывали

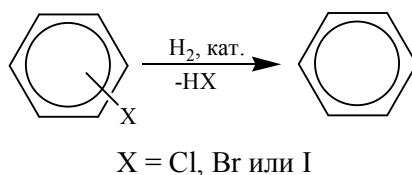
ультразвуком с частотой 40 кГц в ультразвуковой ванне ВУ-09-«Я-ФП»-03 в течение 20 мин при температуре 40—50 °С. Затем к суспензии НА при постоянном перемешивании приливали нагретые до 55 °С растворы соли PdCl<sub>2</sub> в 1Н соляной кислоте (по 50 мл), которые готовили из расчета содержания палладия 0,5, 1 и 2 мас. % от массы НА. Восстановление катализаторов проводили 5 % раствором формиата лития. Синтез осуществлялся при 55 °С. Через 20—30 мин реакционную массу нагревали до 70 °С и оставляли на сутки отстаиваться. Затем 3—4 раза проводили декантацию дистиллированной водой с интервалом, достаточным для отстаивания катализатора. После последней декантации катализатор сушили в вентилируемом сушильном шкафу при 50—60 °С до воздушно-сухого состояния. Все используемые в работе вещества имели маркировку чистоты «химически чистые» (ХЧ) или выше и применялись без предварительной очистки.

Для сравнения свойств по подобной методике был приготовлен катализатор, содержащий 0,5 мас. % палладия на активированном угле марки РНО М200. Использовался уголь производства компании «Еврокарб» (Великобритания), полученный из скорлупы кокосового ореха (см.: [1]).

**Методики исследования палладийсодержащих нанодиазидов.** Качественный и количественный анализ образцов выполнен на микроскопе Zeiss LEO SUPRA 25 (Германия), оснащенный EDX-приставкой. Вакуум в рабочей камере составлял  $6,0 \cdot 10^{-10}$  кПа. Ускоряющее напряжение 10 кВ, плотность тока 0,16—0,25 нА, рабочее расстояние 9,8—10,2 мм, увеличение 25—35 тыс. раз, максимальное разрешение 20 нм.

**Методика гидродегалогидирования.** Модельные реакции ГД (схема) проводили следующим образом: в стеклянный реактор, снабженный рубашкой для термостатирования и магнитной мешалкой для перемешивания (скорость перемешивания подбирали таким образом, чтобы процесс протекал в кинетической области), под слой растворителя (10—15 мл) помещали 30 мг катализатора и 10 мг NaBH<sub>4</sub> и перемешивали содержимое реактора в течение 10 мин. Затем в токе водорода вносили 1 ммоль субстрата и вели гидрирование при T = 45 °С, P<sub>H<sub>2</sub></sub> = 0,1 МПа.

Схема



Наблюдаемую скорость реакции измеряли волюмометрическим методом по поглощению водорода. Известно, что истинную каталитическую активность гетерогенных катализаторов необходимо относить к числу активных центров катализатора, которое оценить сложно. В идентичных условиях проведения реакции для сопоставления каталитической активности изучаемых объектов можно использовать число оборотов реакции (TON, мин<sup>-1</sup>), которое показывает, сколько моль субстрата превращается за минуту в пересчете на 1 моль палладия [6].

В исследуемых условиях модельные реакции имеют нулевой порядок по субстрату и первый по катализатору и водороду [5]. Для подтверждения

протекания процессов в кинетической области использовали критерий Тиле ( $\Phi$ ) [2]:

$$\Phi = R \sqrt{\frac{W}{C \cdot D}},$$

где  $R$  — средний диаметр частиц катализатора, см;  $W$  — скорость реакции на линейном участке кинетической кривой до достижения 10 % конверсии от теоретически рассчитанной для каждого субстрата, моль/(л · с);  $C$  — концентрация субстрата, моль/л;  $D$  — коэффициент диффузии,  $10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с.

Критерий Тиле в проведенных экспериментах оказался существенно меньше 1 ( $\Phi = 0.1—1.3 \cdot 10^{-5}$ ), что, безусловно, свидетельствует о протекании реакции в кинетической области.

Продукты реакции гидрирования анализировали на серийном хроматографе модели 3700 с пламенно-ионизационным детектором и хроматографической стеклянной колонкой диаметром 3 мм и длиной 2 тыс. мм, заполненной лукопреном G-1000 (5 %) на хроматоне N-AW-DMCS. Газ-носитель — азот. Температура испарителя 80—230 °С, температура колонки 40—180 °С (в зависимости от анализируемого вещества), расход газа-носителя —  $1.6 \pm 0.02$  л/ч, объем вводимой пробы — 0.5—1 мкл.

При низком выходе продукта реакции применяли метод потенциометрического титрования. В ходе работы была проведена серия потенциометрических титрований растворов, содержащих продукты ГД хлорбензола, бромбензола и йодбензола, стандартным раствором  $\text{AgNO}_3$ . При этом компенсационным методом измеряли ЭДС цепи с переносом, включающей серебряный и насыщенный хлорсеребряный (марки ЭВЛ-1М3.1) электроды. ЭДС цепи измеряли с точностью  $\pm 0,1$  мВ потенциометром постоянного тока Р37-1 с иономером универсальным ЭВ-74 в качестве нуль-инструмента. Электролитический контакт хлорсеребряного электрода с реакционной ячейкой осуществлялся через солевой мостик, заполненный гелем из агар-агара с добавлением  $\text{NaNO}_3$ . Все измерения проводили при 25 °С. Равновесие считали установившимся, если значение ЭДС не изменялось в пределах 0,1 мВ в течение 3 мин.

### Результаты и их обсуждение

**EDX-анализ палладийсодержащих катализаторов.** С целью подтверждения закрепления палладия на поверхности НА с помощью EDX-приставки сканирующего электронного микроскопа был проведен качественный и количественный анализ образца с самым низким содержанием палладия — 0.5 мас. % Pd/НА. Результаты исследования представлены в табл. 1. Поскольку все другие катализаторы были приготовлены по аналогичной методике, EDX-анализ их не проводили.

Таблица 1

Соотношение элементов в исследуемом образце палладийсодержащих нанодIAMAZOV (0.5 мас. % Pd/НА)

Элемент	Вес. %	Атомн. %	Ошибка вес. %
C	96.91	98.33	2.54
O	1.91	1.46	7.06
Pd	1.09	0.12	52.85
Cl	0.09	0.03	41.32

EDX-анализ образца 0.5 мас. % Pd/HA проводился на площади поверхности  $100 \text{ мкм}^2$ , достаточной для получения средних значений. Анализ показал, что основным элементом в образце является углерод. В исследуемой области наблюдается около 2 мас. % кислорода, по-видимому существующего в виде функциональных групп на поверхности HA. Поскольку синтез катализаторов проводился из раствора соляной кислоты и хлорида палладия, актуальным вопросом остается наличие в полученном катализаторе хлоридов, которые могут отравлять поверхность палладия и переводить его в состояние  $\text{Pd}^{2+}$ , неспособное активировать молекулу водорода. Анализ показал наличие палладия, согласующееся с расчетными значениями в пределах погрешности измерения прибора. Также наблюдается незначительное содержание хлорид-ионов, которые могли остаться в катализаторе в виде соединения  $[\text{PdCl}_4]^{2-}$ .

Для подбора оптимального органического растворителя при проведении ГД использовали катализатор 0.5 мас. % палладия на активированном угле марки РНО М200. В качестве растворителей были выбраны: циклогексанол, этанол, изопропанол, бензол и гексан (табл. 2).

Таблица 2

#### Влияние природы растворителя на скорость гидродегалогенирования

Субстрат	Растворитель	$W \cdot 10^5$ , моль/(л · с)
Хлорбензол	Этанол	6.4
	Изопропанол	0.8
	Циклогексанол	1.5
	Гексан	0
	Бензол	0
Бромбензол	Этанол	2.6
	Изопропанол	1.1
	Циклогексанол	3.7
Йодбензол	Этанол	0.02
	Изопропанол	0.01
	Циклогексанол	0.013

*Примечание.* Условия реакции:  $T = 318 \text{ K}$ ;  $P_{\text{H}_2} = 1 \text{ атм}$ ; 30 мг катализатора 0.5 мас. % Pd/C; 10 мг  $\text{NaBH}_4$ ; 15 мл растворителя; 1 ммоль субстрата.

Анализ полученных результатов показывает, что скорость ГД монозамещенных галогенбензолов снижается в ряду растворителей этанол > циклогексанол >> изопропанол >>> гексан, бензол. Отсутствие ГД в гексане и бензоле может быть объяснено тем, что в апротонных растворителях гетеролитическая диссоциация молекулы водорода на палладии протекает хуже, чем в спиртах. Видно, что для всех трех субстратов максимальная скорость реакции ГД наблюдается в среде этанола, поэтому дальнейшие эксперименты проводились в этом растворителе (табл. 3).

Таблица 3

**Каталитические свойства палладийсодержащих наноалмазов  
в модельной реакции гидродегалогенирования в среде этанола**

Катализатор (Pd), мас. %	Хлорбензол			
	$W \cdot 10^5$	TON	K	$\omega$ (бензол)
0.5 Pd/HA	3.8	21.8	98.2	11.3
1.0 Pd/HA	5.0	14.4	64.8	13.8
2.0 Pd/HA	8.0	11.3	50.8	25.6
0.5 Pd/C	6.4	17.8	80.1	12.7
	Бромбензол			
0.5 Pd/HA	0.2	0.3	1.2	14.4
1.0 Pd/HA	0.6	3.5	15.7	16.2
2.0 Pd/HA	–	–	–	–
0.5 Pd/C	2.6	14.4	64.6	16.5
	Йодбензол			
0.5 Pd/HA	0.005	0.05	0.1	4.7
1.0 Pd/HA	–	–	–	–
2.0 Pd/HA	–	–	–	–
0.5 Pd/C	0.02	0.1	0.5	4.5

*Примечание.* Условия реакции:  $T = 318 \text{ K}$ ;  $P_{H_2} = 1 \text{ атм}$ ; 30 мг катализатора; 10 мг  $NaBH_4$ ; 10 мл растворителя (этанол); 1 ммоль субстрата; время реакции 2 ч;  $W$  — скорость реакции в начальный момент, моль/(л · с);  $k$  — константа скорости реакции, л/(моль · с); TON — число оборотов реакции,  $\text{мин}^{-1}$ .

Как видно из табл. 3, с увеличением содержания металла в катализаторе начальная скорость реакции увеличивается, однако активность катализаторов снижается и выход продукта реакции (бензола) остается невысоким. Катализатор на основе активированного угля схож по характеристикам с 0.5 мас. % Pd/HA, но он оказался менее селективным к изменению природы субстрата, что может свидетельствовать о более упорядоченном строении металлоцентров катализаторов на основе HA. Выход по бензолу на 0.5 мас. % Pd/C также невысок. Возможно, это связано с тем, что в определенный промежуток времени катализатор перестает работать. Данный факт, вероятно, говорит о том, что из-за контакта с образующимися в ходе реакции галогенид-ионами, которые взаимодействуют с палладием и переводят его из рабочего состояния  $Pd^0$  в окисленное  $Pd^{2+}$ , неспособное активировать водород, реакция прекращается.

Видно, что скорость реакции ГД уменьшается в ряду хлорбензол, бромбензол  $\gg$  йодбензол. Эту последовательность можно объяснить с помощью квантово-химических расчетов [4]. Согласно им, скорость реакции должна увеличиваться в ряду йодбензол  $>$  бромбензол  $>$  хлорбензол,

совпадающем с увеличением связи галоген — углерод. Однако для исследуемых катализаторов в изученных условиях зарядовый контроль реакции ГД преобладает над орбитальным и скорость процесса будет определяться величиной заряда на атоме галогена в субстрате. Поскольку водород, активированный на палладии, несет положительный заряд, то скорость ГД должна увеличиваться с возрастанием величины отрицательного заряда на атоме галогена. Согласно квантово-химическим расчетам [4], величины заряда на атоме галогена в ряду моногалогенбензолов изменяются следующим образом: заряд на атоме хлора в хлорбензоле ( $-0,026$  д. э. з.), на атоме брома в бромбензоле ( $+0,043$  д. э. з.), а на атоме йода в йодбензоле ( $+0,137$  д. э. з.). Эта последовательность совпадает с экспериментально найденными изменениями скорости ГД (табл. 3).

Таким образом, все синтезированные палладийсодержащие катализаторы оказались активными в модельных реакциях ГД моногалогенбензолов в приведенных условиях, однако требуется дополнительное изучение процесса с целью оптимизации условий проведения ГД.

#### Библиографический список

1. Белецкая М. Г. Синтез углеродных адсорбентов методом термохимической активации гидролизного лигнина с использованием гидроксида натрия : автореф. дис. ... канд. хим. наук. Архангельск, 2014. 15 с.
2. Березин И. В., Клесов А. А. Практический курс химической и ферментативной кинетики. М. : Изд-во МГУ, 1976. 265 с.
3. Герасимов Г. Я. // Химия высоких энергий. 2007. Т. 41, № 1. С. 23—27.
4. Калмыков П. А., Магдалинова Н. А., Клюев М. В. // Квантово-химические расчеты: структура и реакционная способность органических и неорганических молекул : материалы VII Всероссийской молодежной школы-конференции, Иваново, 14—17 апреля 2015 г. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2015. С. 130—134.
5. Калмыков П. А., Магдалинова Н. А., Клюев М. В. // Нефтехимия. 2015. Т. 55, № 1. С. 66—72.
6. Крылов О. В. Гетерогенный катализ : учебное пособие для вузов. М. : Акад. кн., 2004. 679 с.
7. О ратификации Стокгольмской конвенции о стойких органических загрязнителях : Федеральный закон от 17 июня 2011 г. № 164. URL: <http://www.bestpravo.ru/federalnoje/ea-postanovlenija/z2v.htm> (дата обращения: 10.03.2016).
8. Mochalin V. N., Shenderova O., Ho D., Gogotsi Y. // Nature Nanotechnology. 2012. Vol. 7, № 1. P. 11—23.
9. Shul'zhenko A. A., Sokolov A. N., Tkach V. N., Belyavina N. N. // J. of Superhard Materials. 2010. Vol. 32, № 4. P. 227—230.

УДК 536.581:544.433.22:547.551:544.362.4

*Е. Н. Крылов, М. В. Логинова***ГИДРОЛИЗ ЗАМЕЩЕННЫХ АЦЕТАНИЛИДОВ  
КАК ФУНКЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОЛЕКУЛ  
И РЕАКЦИОННОГО ЦЕНТРА**

Общая электрофильность и молекулярный электростатический потенциал выступают адекватными дескрипторами реакционной способности замещенных ацетанилидов в реакции гидролиза. Стадией, определяющей скорость реакции, является распад тетраэдрического интермедиата.

**Ключевые слова:** замещенные ацетанилиды, гидролиз, электрофильность, молекулярный электростатический потенциал.

Global electrophilicity and molecular electrostatic potential are an identical descriptor of substituted acetanilides reaction ability in hydrolysis reactions. The defining velocity stage is a disintegration of tetrahedral intermediate.

**Key words:** substituted acetanilides, hydrolysis, electrophilicity, molecular electrostatic potential.

**Введение**

Гидролиз ацетанилидов изучался как экспериментальными (кинетическими) методами [2, 4], так и теоретически на уровне расчета энергий переходных состояний и интермедиатов с учетом неспецифической сольватации [9], поскольку эта реакция представляет собой модельный процесс для более важной реакции расщепления пептидной связи [3]. Установлено, что данный процесс является двухстадийным и сопровождается образованием тетраэдрического интермедиата, распад которого, как предполагается [7, 6], определяет скорость реакции.

Однако реакционная способность органических соединений и механизмы органических реакций могут быть исследованы альтернативными методами, базирующимися на приложении теории DFT к количественной теории жестких и мягких кислот и оснований [5, 8]. Для описания химической активности молекул методами DFT рассчитываются их параметры, называемые индексами реакционной способности (ИРС), величины которых характеризуют и активность молекулы в целом — электроотрицательность ( $\chi$ ), электронный химический потенциал ( $\mu$ ), жесткость ( $\eta$ ), электрофильность ( $\omega$ ), и активность отдельных реакционных центров (так называемые локальные ИРС) — функцию Фукуи (FF), локальную жесткость и электрофильность ( $\omega_{\text{лок}}$ ), определяемые как произведение общего их значения на величину FF (например,  $\omega_{\text{лок}} = \omega \cdot \text{FF}$ ), а также молекулярный электростатический потенциал на реакционном центре (МЭП,  $V_{\text{esp}}$ ). Расчетные формулы непосредственно выведены на основании теории DFT, что отличает, например, выражение для электроотрицательности от определения Малликена [12] по происхождению, хотя оба выражения совпадают структурно.

---

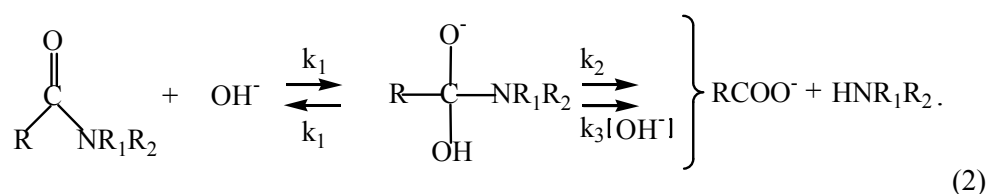
© Крылов Е. Н., Логинова М. В., 2016

• Серия «Естественные, общественные науки»



### Результаты и их обсуждение

Для приложения указанного теоретического подхода к анализу реакций нуклеофильного замещения на карбонильном атоме углерода в качестве модельной выбрана реакция щелочного гидролиза ядернозамещенных ацетанилидов  $XPhNHCOMe$  ( $X$  — заместитель) в водной среде в соответствии со схемой (1), для которой имеются надежные кинетические данные [7]. Предполагается [6], что реакция идет через стадию образования тетраэдрического интермедиата (2), распад которого определяет общую скорость реакции.



Расчет структур замещенных ацетанилидов для определения квантово-химических ИПС проведен программным комплексом NWChem ver. 6.5 [14] на уровне теории DFT M06/6-311+G\* с учетом влияния растворителя в рамках метода SMD [11] ( $\epsilon = 78.26$  при  $25^\circ$ ). Расчетные данные приведены в табл. 1, 2.

Здесь и далее  $\mu = 0.5 \cdot [E(\text{HOMO}) + E(\text{LUMO})]$ ,  $\eta = 0.5 \cdot [E(\text{LUMO}) - E(\text{HOMO})]$ ,  $\omega = 0.5 \cdot \mu^2/\eta$ ,  $E(\text{HOMO})$  — энергия высшей занятой молекулярной орбитали,  $E(\text{LUMO})$  — энергия низшей вакантной молекулярной орбитали.

Таблица 1

**Квантово-химические параметры  $XPhNHCOMe$  в водной среде**

X	-Vesp(C)	-Vesp(N)	Q(C)	Q(C')	E(HOMO)	E(LUMO)
H	14.658551	18.340390	0.192	0.061	-0.24545	-0.02381
NO <sub>2</sub>	14.621818	18.299780	0.207	0.187	-0.26347	-0.10345
OCH <sub>3</sub>	14.677278	18.397654	0.994	0.168	-0.21081	-0.02084
CH <sub>3</sub>	14.663875	18.346003	0.189	-0.023	-0.23866	-0.02375
CHO	14.634333	18.314331	0.202	0.175	-0.25593	-0.07104
COCH <sub>3</sub>	14.640588	18.320973	0.201	0.173	-0.25280	-0.06488
NH <sub>2</sub>	14.674593	18.320973	0.184	0.170	-0.21637	-0.02381

*Примечание.* Здесь и далее  $E(\text{HOMO})$ ,  $E(\text{LUMO})$  — в единицах Hartree, Vesp — а.у., Q — в единицах заряда электрона (e),  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\omega$  — в eV, 1 а.у.Vesp =  $3.0277 \cdot 10^{-9}$  кл/м.

Таблица 2

## Индексы реакционной способности XPhNHCOMe в водной среде

X	$\mu$	$\eta$	$\omega$	$\omega(\text{лок})$	$-V_{\text{esp}}(\text{C})$	$-\ln K [7]$
H	-3.663	3.016	2.225	0.292	14.658551	11.86
NO <sub>2</sub>	-4.992	2.177	5.724	0.112	14.621818	7.28
OCH <sub>3</sub>	-3.152	2.585	1.923	1.586	14.677278	11.86
CH <sub>3</sub>	-3.570	2.924	2.180	0.464	14.663875	11.93
CHO	-4.449	2.516	3.934	0.108	14.634333	8.73
COCH <sub>3</sub>	-4.322	2.557	3.653	0.102	14.640588	9.88
NH <sub>2</sub>	-3.268	2.620	2.0380	0.029	14.674593	-13.04

Как показывает зависимость на рис. 1, реакционная способность замещенных ацетанилидов при нуклеофильной атаке гидроксил-анионом возрастает с увеличением общей электрофильности (электроноемкости) субстрата, что согласуется с нуклеофильным характером процесса. Корреляционная зависимость (3) весьма близка к линейной, а коэффициенты линейной регрессии и коэффициент корреляции проходят проверку на статистическую значимость по стандартной процедуре [1].

$$\ln K = (-15.05 \pm 0.56) + (1.42 \pm 0.17) \cdot \omega, R = 0.967,$$

$$SD = 0.577, N = 7, \quad (3)$$

$$P = 3.6 \cdot 10^{-4}.$$

Локальная электрофильность в данном случае не является индексом, характеризующим скорость реакции, поскольку зависимость  $\ln k$  vs  $\omega(\text{лок})$  имеет вид обратной параболы.

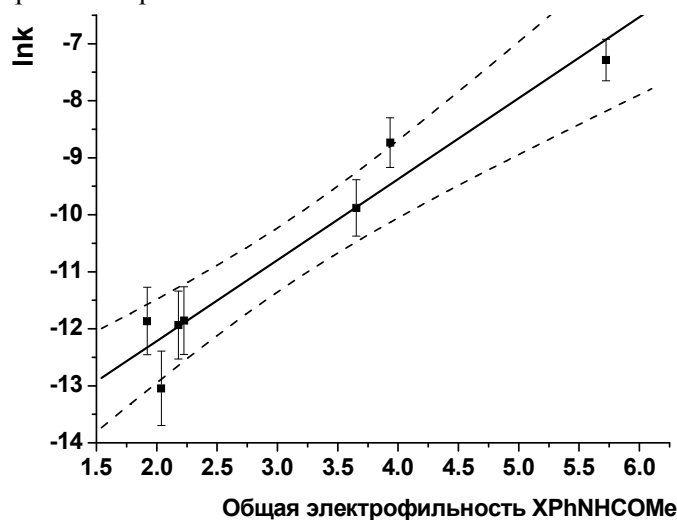


Рис. 1. Реакционная способность замещенных ацетанилидов в реакции щелочного гидролиза как функция общей электрофильности молекул субстратов: здесь и далее доверительный интервал линейной корреляции 95 %, коридор ошибок по оси ординат 5 % [1]

Аналогичная вышеуказанной симбатная зависимость (рис. 2) наблюдается и для логарифмической анаморфозы константы скорости от величины МЭП на реакционном центре — карбонильном атоме углерода, который подвергается нуклеофильной атаке.

При этом чем менее отрицателен МЭП, тем быстрее происходит процесс атаки гидроксил-анионом. По всей видимости, именно стадия нуклеофильной атаки — иначе говоря, стадия образования тетраэдрического интермедиата, а не его распада [6] — является стадией, определяющей скорость исследуемой реакции.

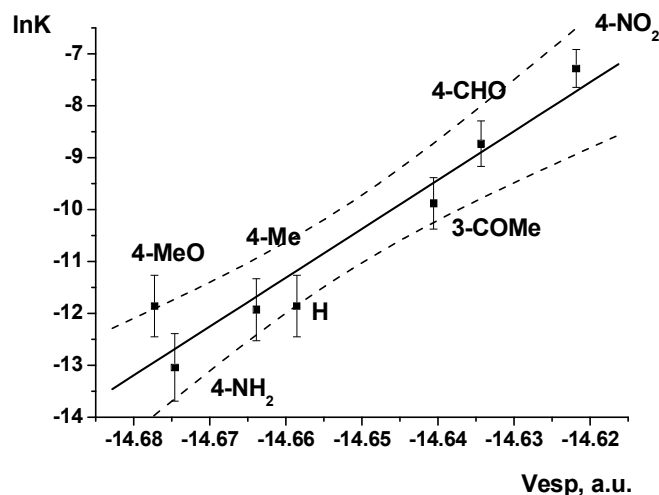


Рис. 2. Реакционная способность замещенных ацетанилидов в реакции щелочного гидролиза как функция МЭП (Vesp) на реакционном центре (атоме углерода карбонильной группы):  
 $\ln K = (1540.0 \pm 143.5) + (105.9 \pm 9.8) \cdot \text{Vesp}$ ,  $R = 0,983$ ,  $SD = 0.399$ ,  $N = 6$ ,  $P = 4.2 \cdot 10^{-4}$

Это согласуется с вышеуказанным фактом симбатной зависимости между  $\ln K$  и общей электрофильностью ацетанилидов, а также с положительным трендом линейной корреляции (4) между  $\ln K$  и зарядом в схеме Хиршфельда [10] на реакционном центре (рис. 3).

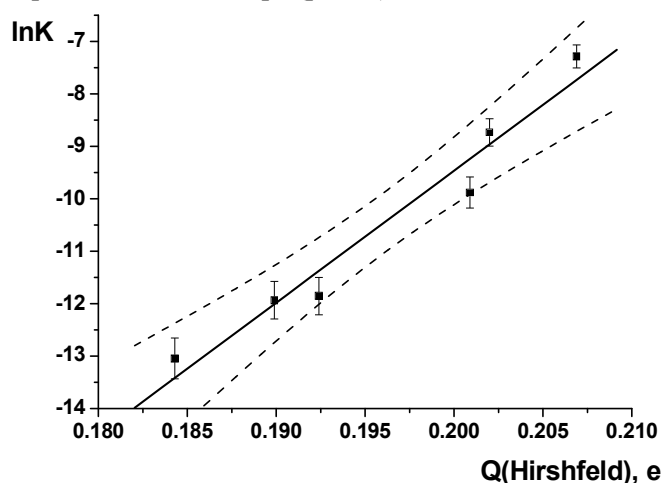
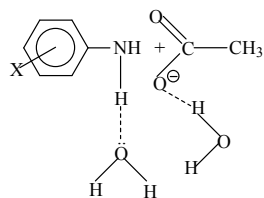
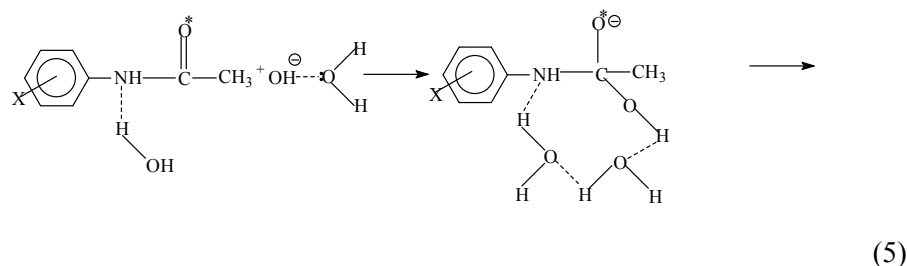


Рис. 3. Реакционная способность замещенных ацетанилидов как функция заряда на атоме карбонильного углерода (реакционный центр): заряды определены в схеме Хиршфельда [10]

По всей вероятности, перенос протона на уходящую группу (XPhNH<sub>2</sub>) происходит в циклическом переходном состоянии с участием двух молекул воды, одна из которых отдает свой протон аминогруппе, одновременно принимая его от второй молекулы воды, которая при этом превращается в гидроксил-анион (5).

$$\ln K = (-59.79 \pm 5.21) + (251.6 \pm 26.6) \cdot Q(C), R = 0.978, \\ SD = 0.51, N = 6, P = 7 \cdot 10^{-4}. \quad (4)$$



### Заключение

Таким образом, на основании теории реакционной способности в рамках концептуальной DFT [13] можно сделать вывод, что не распад тетраэдрического интермедиата, а, по всей вероятности, его образование определяет скорость реакции. Вывод о лимитировании скорости распадом интермедиата был сделан авторами [6] на основании сопоставления квантово-химических расчетных величин активационных барьеров, однако использованные ими уровни теории [DFT B3LYP/6-31+G(d,p)/IEF-PCM] и тем более HF/6-31+G(d)/IEF-PCM вряд ли достаточны для достижения необходимой («химической») точности (примерно  $\pm 1$  ккал/моль) при определении энергий активации.

### Библиографический список

1. Ахназарова С. А., Кафаров В. В. Оптимизация эксперимента в химии и химической технологии. М.: Высш. шк., 1985. 327 с.
2. Bender M. L., Thomas R. J. The concurrent alkaline hydrolysis and isotopic oxygen exchange of a series of p-substituted acetanilides // J. Am. Chem. Soc. 1961. Vol. 83. P. 4183—4189.
3. Brown R. S. Studies in amide hydrolysis: the acid, base, and water reactions // The Amide Linkage: Selected Structural Aspects in Chemistry, Biochemistry and Materials Science / ed. by C. M. Breneman, A. Greenberg, J. F. Liebman. New York: Wiley Int., 1999. P. 85—115.
4. Buurma N. J., Blandamer M. J., Engberts J. B. General-base catalysed hydrolysis and nucleophilic substitution of activated amides in aqueous solutions // J. Phys. Org. Chem. 2003. Vol. 16, iss. 8. P. 438.
5. Chemical Reactivity Theory: A Density Functional View / ed. by P. K. Chattaraj. New York: CRC Press, 2009. 610 p.

6. Cheshmedzhieva D., Ilieva S., Hadjieva B., Galabov B. The mechanism of alkaline hydrolysis of amides : a comparative computational and experimental study of the hydrolysis of n-methylacetamide, n-methylbenzamide and acetanilide // J. Phys. Org. Chem. 2009. Vol. 22, iss. 6. P. 619—631.
7. Cheshmedzhieva D., Ilieva S., Hadjieva B., Trayanova T. Reactivity of acetanides in the alkaline hydrolysis reaction: theory vs. experiment // Mol. Phys. 2009. Vol. 107, № 8—12. P. 1187—1192.
8. Concepts and Methods in Modern Theoretical Chemistry : Electronic Structure and Reactivity / ed. by S. K. Ghosh, P. K. Chattaraj. New York : CRC Press, 2013. 450 p.
9. Galabov B., Cheshmedzhieva D., Ilieva S., Hadjieva B. Computational study of the reactivity of N-Phenylacetamides in the alkaline hydrolysis reaction // J. Phys. Chem. A. 2004. Vol. 108, № 51. P. 11457—11462.
10. Lillestolen T. C., Wheatley R. J. Atomic charge densities generated using an iterative stockholder procedure // J. Chem. Phys. 2009. Vol. 131. P. 144101-1—144101-6.
11. Marenich A. V., Cramer C. J., Truhlar D. G. Universal solvation model based on solute electron density and on a continuum model of the solvent defined by the bulk dielectric constant and atomic surface tensions // J. Phys. Chem. B. 2009. Vol. 113, № 18. P. 6378—6396.
12. Mulliken R. S. Electronic population analysis on LCAO-MO molecular wave functions 1 // J. Chem. Phys. 1955. Vol. 23, № 10. P. 1833—1840.
13. Theoretical Aspects of Chemical Reactivity / ed. by A. Toro-Labbe. Oxford : Elsevier, 2007. 322 p.
14. Valiev M., Bylaska E. J., Govind N. et al. NWChem: a comprehensive and scalable open-source solution for large scale molecular simulations // Comput. Phys. Commun. 2010. Vol. 181, iss. 9. P. 1477—1489.

УДК 544.424.2:547.541.51:544.433.22:544.163:544.362.4

*Е. Н. Крылов*

## МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ КАК ДЕСКРИПТОР РЕАКЦИОННОЙ СПОСОБНОСТИ АРИЛСУЛЬФОНИЛГАЛОГЕНИДОВ

Молекулярный электростатический потенциал на атоме сульфонильной серы в реакции гидролиза сульфонилгалогенидов адекватно отражает эволюцию механизма реакции при изменении их структуры. Положение переходного состояния на координате реакции и стадия, определяющая скорость, характеризуются трендом изменения этого потенциала.

**Ключевые слова:** сульфонилгалогениды, нуклеофильное замещение, гидролиз, молекулярный электростатический потенциал.

The molecular electrostatic potential on atom of sulphur(VI) in the hydrolysis reaction of sulphonyl halides adequately reflects change the reaction mechanism when change the sulphonyl halides structure. Position of the transition state on reaction coordinate and velocity defining stage are defined by trend of change of this potential.

**Key words:** sulfonyl halides, nucleophilic substitution, hydrolysis, molecular electrostatic potential.

---

© Крылов Е. Н., 2016

### Введение

Для исследования реакционной способности химических структур в последние два десятилетия интенсивно используется DFT-теория реакционной способности [16], базирующаяся на достижениях теории функционала плотности [22] в сочетании с количественной теорией жестких и мягких кислот и оснований Льюиса — Пирсона [23]. В основе применения этой концепции лежит расчет квантово-химических индексов реакционной способности (ИРС), представляющих собой частные производные от энергии как функции числа электронов, получаемые решением уравнений Кона — Шэма [19] и превращаемые в аналитически вычисляемые выражения методом конечных разностей [18]. Эти ИРС коррелируют с различными параметрами реакционной способности органических соединений, в частности с позиционной и субстратной селективностью реакций.

К числу таких глобальных (относящихся ко всей молекуле в целом) индексов принадлежат электронный химический потенциал, жесткость, электрофильность [5, 8] и их локальные (относящиеся к конкретным реакционным центрам) анаморфозы [29]. ИРС, характеризующим реакционные центры, т. е. позиционную селективность реакции, является также молекулярный электростатический потенциал (МЭП, *Vesp*) [8, 16, 21].

МЭП по определению характеризует энергию взаимодействия пробного точечного положительного заряда с электростатическим полем атома, около которого помещен этот заряд. Если рассчитанная таким образом энергия отрицательна, то это означает притяжение, а следовательно, понижение общей энергии системы [12]. Если же при взаимодействии МЭП с пробным точечным положительным зарядом наблюдается повышение энергии, то это соответствует отталкиванию, что, в свою очередь, должно приводить, например, к устранению нуклеофильной частицы из зоны отрицательного МЭП.

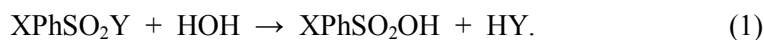
МЭП обычно ассоциирован с электроотрицательными атомами (азот, кислород, сульфонильная сера), причем с этими атомами совпадают места локальных минимумов с более отрицательным МЭП по сравнению с окружающими. Из теории МЭП следует, что его распределение влияет на дальнедействующее взаимодействие реагентов, когда пертурбационные возмущения их электронной плотности достаточно малы [25].

В современных публикациях МЭП рассматривается как фундаментальный фактор, определяющий природу и поведение атомов и молекул и их способность к межмолекулярным взаимодействиям [25, 26].

Для описания реакционной способности органических соединений МЭП является более подходящим статическим дескриптором по сравнению с зарядами на атомах, поскольку он представляет собой физически наблюдаемую величину [28] (в отличие от заряда) и может быть определен экспериментально. Известно, в частности, что шесть различных методов расчета заряда дают его величину на атоме углерода в нитрометане от  $-0.478$  до  $+0.564 e$  [31].

### Результаты и их обсуждение

Для анализа реакционной способности ароматических сульфонилагалогенидов ( $XPhSO_2Y$ ,  $Y = F, Cl, Br$ ) подобный метод ранее не применялся. В качестве основной модельной реакции выбран гидролиз ароматических сульфонилагалогенидов, который идет в соответствии со схемой (1) ( $X$  — заместитель в кольце) и для которого имеются надежные кинетические данные [14]:



Для данной реакции проблема заключается в определении соотношения между механизмами  $S_N1$ ,  $S_N2$  [6] и  $S_{AN}$  [3, 4], а также соотношения степени образования связи сера — нуклеофил и разрыва связи сера — хлор [4] в зависимости от типа среды, заместителя в ароматической структуре и нуклеофугности уходящей группы в соответствии с диаграммой О'Феррала — Дженкса [20]. Поэтому необходимо наличие чувствительности кинетических характеристик процесса к изменению параметров МЭП, в свою очередь зависящих от структуры молекул  $XPhSO_2Y$ .

Расчеты параметров структур молекул замещенных  $XPhSO_2Y$  осуществлены программным комплексом ADF2014 [10] на уровне теории DFT/M06/6-311+G\* с учетом влияния растворителя в рамках модели диэлектрического континуума методом PCM [30]. Оптимизация геометрии проведена без ограничений по симметрии с учетом данных по геометрии некоторых из них [7, 13] и при контроле отсутствия одной отрицательной частоты путем расчета ИК-спектра.

Примером успешного использования МЭП при анализе реакции гидролиза может служить работа [14], в которой обнаружены корреляции между скоростью реакции гидролиза производных ацетанилида и МЭП на атомах азота и углерода с положительным трендом. Это указывает на облегчение нуклеофильной атаки при сдвиге значения МЭП в менее отрицательную область и, как следствие этого, ускорение образования тетраэдрического интермедиата, промежуточного в нуклеофильных реакциях, на карбонильном атоме углерода.

В качестве таких модельных реакций нуклеофильного замещения на атоме сульфониальной серы могут быть выбраны реакция гидролиза замещенных тиофенсульфонилгалогенидов ( $XThySO_2Y$ ,  $Y = Cl, Br$ ) в среде водного ацетона (ацетон 95 об. %) [9] (табл. 1, 2) и аналогичная ей реакция гидролиза замещенных бензолсульфонилгалогенидов ( $XPhSO_2Y$ ,  $Y = F, Cl$ ). Для этих реакций имеются надежные кинетические данные [15].

Таблица 1

**МЭП (Vesp) на атомах S в  $XThySO_2Cl$  и их реакционная способность при гидролизе в системе MeCOMe : H<sub>2</sub>O (95 : 5 v/v) и H<sub>2</sub>O. Константы скорости гидролиза в бинарной среде и воде Khydr и Khydr(H<sub>2</sub>O) — с<sup>-1</sup> [9]**

X	-Vesp, a.u.*	Khydr	lgKhydr	Khydr(H <sub>2</sub> O)	lgKhydr(H <sub>2</sub> O)
5-Me	58.992282	0.210	-0.678	127	2.104
H	58.986184	0.806	-0.094	47.8	1.679
5-Cl	58.97986	1.590	0.201	16.4	1.215
4-NO <sub>2</sub>	58.95959	12.20	1.086	27.0	1.431
5-NO <sub>2</sub>	58.956336	30.90	1.480	30.1	1.479

\* Здесь и далее 1 a.u. Vesp =  $3.0277 \cdot 10^{-9}$  кл/м [2].

Корреляционное соотношение (2) и иллюстрирующий его график на рис. 1 свидетельствуют об ускорении реакции при увеличении акцепторных свойств заместителей и сопровождающем этот процесс уменьшении отрицательного значения МЭП. Симбатный характер зависимости между логарифмом констант скорости гидролиза и МЭП [lgKhydr vs Vesp (2)] говорит о том, что нуклеофильная атака является скоростью-определяющей при взаимодействии тиофенсульфонилхлоридов данной выборки и молекулы воды.

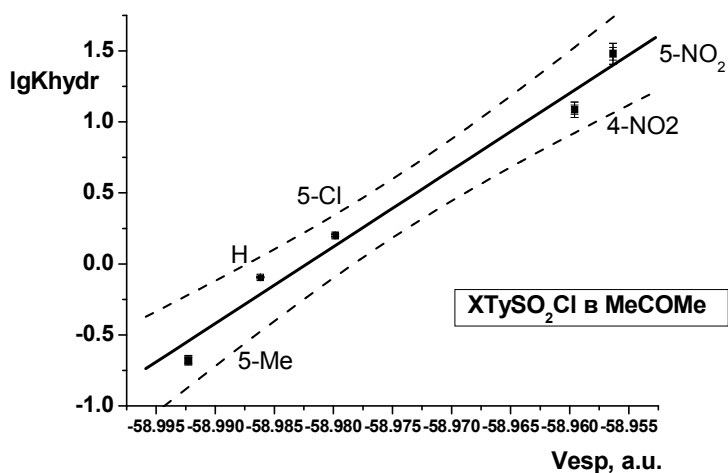


Рис. 1. Корреляция  $\lg K_{\text{hydr}}$  и  $V_{\text{esp}}$  для гидролиза  $X\text{TySO}_2\text{Cl}$ : здесь и далее X — заместитель, интервал ошибок в экспериментальных точках 5 %, доверительный интервал корреляционных зависимостей 95 % [1]

$$\lg K_{\text{hydr}} = (3188.8 \pm 266.3) + (54.1 \pm 4.5) \cdot V_{\text{esp}}(S),$$

$$R = 0.990, SD = 0.145, N = 5, P = 1.2 \cdot 10^{-3}. \quad (2)$$

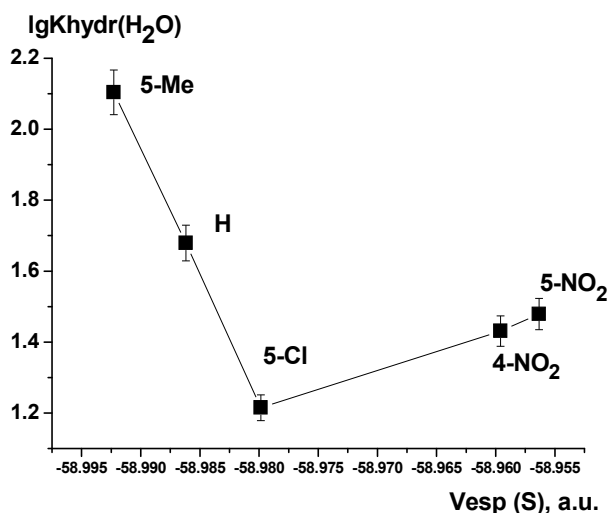


Рис. 2. Корреляция  $\lg K$  гидролиза  $X\text{TySO}_2\text{Cl}$  и МЭП на атоме сульфонильной серы: набор данных для гидролиза в водной среде

Однако при использовании набора данных, полученных в водной среде, наблюдается излом в точке, соответствующей  $X = 5\text{-Cl}$ , и смена отрицательного тренда зависимости  $\lg K_{\text{hydr}}$  vs  $V_{\text{esp}}$  на положительный, свидетельствующий об ускорении реакции при уменьшении отрицательного значения МЭП (рис. 2). Как известно, акцепторы уменьшают (делают менее отрицательной) величину  $V_{\text{esp}}$  своим электронным эффектом в соответствии с физическим смыслом МЭП. Наблюдаемая картина свидетельствует о смене стадии, определяющей скорость, поскольку для акцепторных X она является нуклеофильной атакой: акцепторы облегчают нуклеофильную атаку и затрудняют анионоидный отрыв плохой уходящей группы (хлорид-аниона).



Таким образом, тиофенсульфонилхлориды с акцепторными заместителями при гидролизе в воде образуют свою реакционную серию с положительным трендом зависимости  $\lg K_{\text{hydr}} \text{ vs } V_{\text{esp}}$  (рис. 2). Явление, представленное на рис. 2, вполне может указывать на реакцию с нестабильным механизмом, когда изменяется соотношение между степенью образования связи S — нуклеофил и разрывом связи S — галоген с реализацией более тесной или рыхлой структуры переходного состояния.

Таблица 2

**МЭП на атомах S в  $X\text{TySO}_2\text{Br}$  и их реакционная способность при гидролизе в системе  $\text{MeCOMe} : \text{H}_2\text{O} (95 : 5 \text{ v/v})$  [9],  $K_{\text{hydr}}$  и  $K_{\text{hydr}}(\text{H}_2\text{O})$  —  $\text{c}^{-1}$**

X	-Vesp, a.u.	$K_{\text{hydr}}$	$\lg K_{\text{hydr}}$	$K_{\text{hydr}}(\text{H}_2\text{O})$	$-\lg K_{\text{hydr}}(\text{H}_2\text{O})$
5-Me	59.002784	0.129	-0.0445	8.38	0.0200
H	58.996420	0.184	-0.0368	1.94	0.1530
5-Cl	58.980188	0.256	-0.0296	1.07	0.2125
4-NO <sub>2</sub>	58.970815	0.402	-0.0198	0.416	0.1238
5-NO <sub>2</sub>	58.967574	0.986	-0.0003	0.474	0.0942

Кроме того, вероятен сдвиг переходного состояния по перпендикулярной координате в соответствии с диаграммой О'Феррала — Дженкса [20] в сторону механизма  $S_{\text{AN}}$ , поскольку акцепторы стабилизируют структуры, близкие по строению к тетраэдрическому интермедиату.

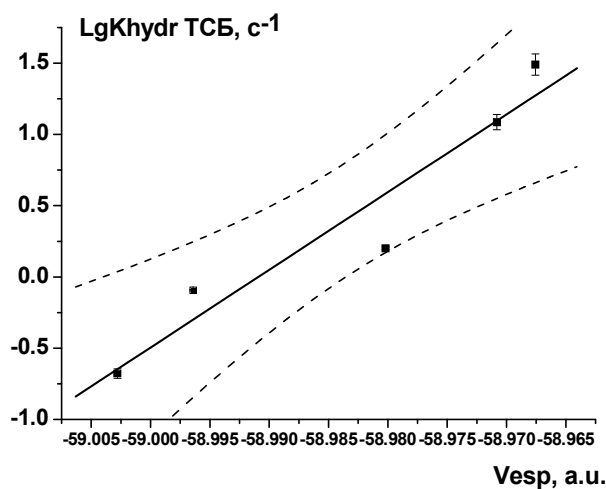


Рис. 3. Реакционная способность  $X\text{TySO}_2\text{Br}$  (ТСБ) при гидролизе в водном ацетоне как функция МЭП S(VI)

$$\lg K_{\text{hydr}}(\text{ТСБ}) = (1187.6 \pm 302.4) + (20.1 \pm 5.1) \cdot V_{\text{esp}}(\text{S}),$$

$$R = 0.915, \text{SD} = 0.159, N = 5, P = 0.029. \quad (3)$$

В то же время для тиофенсульфонилбромидов (табл. 2, рис. 3) наблюдается симбатная зависимость (3) между логарифмом константы скорости гидролиза ( $\lg K_{\text{hydr}}$ ) и  $V_{\text{esp}}$ , что свидетельствует о сохранении стадии, определяющей скорость, во всем интервале изменения заместителей.

При этом смена уходящей группы изменяет соотношение между скоростями нуклеофильной атаки и анионоидного отрыва, поскольку хлорид-анион — плохая уходящая группа (плохой нуклеофуг). Известно, в частности, что рассчитанная в eV нуклеофугность бромид-аниона составляет, по данным [22],  $-4.26$  в среде  $\text{CH}_2\text{Cl}_2$  и  $-6.43$  в  $\text{MeOH}$  относительно  $-3.61$  и  $-5.37$  eV для хлорид-аниона. Поэтому при  $X = \text{Cl}$  стадией, лимитирующей скорость, является анионодный отрыв, а для  $X = \text{Br}$  — нуклеофильная атака.

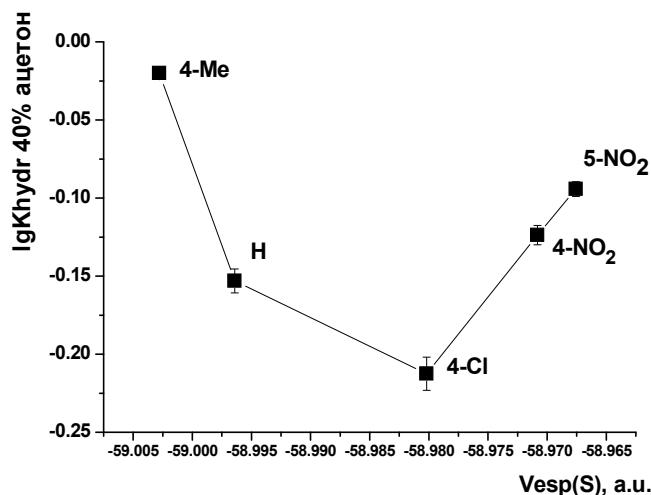


Рис. 4. Гидролиз ТСБ в водном ацетоне. Изменение лимитирующей стадии при изменении заместителя. Корреляция (4) по акцепторным X

$$\lg K_{\text{hydr}} (40\% \text{ водный ацетон, ТСБ, X — акцепторы}) = (554.3 \pm 4.1) + (9.40 \pm 0.07) \cdot \text{Vesp}, R = 0.9999, SD = 0.00065, N = 3, P = 0.005. \quad (4)$$

При изменении состава бинарного растворителя (40 объемных % ацетона) зависимость  $\lg K_{\text{hydr}}$  vs  $\text{Vesp}$  приобретает V-образный характер, аналогично зависимости для сульфонилхлоридов, что также свидетельствует о смене лимитирующей стадии, но уже при изменении заместителя (рис. 4).

Похожая линейная антибатная зависимость (5) между  $\lg K_{\text{hydr}}$  и МЭП на атоме сульфонильной серы наблюдается для алифатических сульфонилхлоридов  $\text{Y-SO}_2\text{Cl}$  (выборка  $\text{Y} = \text{Me}, \text{Et}, 2\text{-Cl-CH}_2\text{CH}_2$ ) (табл. 3), которые образуют свою реакционную серию, поскольку бензолсульфонилхлорид в эту серию не входит. Здесь, как и в первом случае, нет сильных акцепторов в структурах  $\text{YSO}_2\text{Cl}$ , поэтому в этой узкой выборке сохраняется стадия, определяющая скорость, — анионодный отрыв  $\text{Cl}^-$ .

$$\lg K_{\text{hydr}} [26] = (-1031.2 \pm 94.1) - (17.42 \pm 1.60) \cdot \text{Vesp(S)}, R = 0.996, SD = 0.02, N = 3, P = 0.059. \quad (5)$$

Таблица 3

Параметры  $\text{XSO}_2\text{Cl}$  при гидролизе в воде ( $T = 25^\circ\text{C}$ )

X	Vesp(S)	Khydr [11]	lgKhydr
Me	-58.978711	$1.90 \cdot 10^{-4}$	-3.721
Et	-58.989412	$3.07 \cdot 10^{-4}$	-3.513
1-ClEt	-58.983321	$1.26 \cdot 10^{-5}$	-4.890
2-ClEt	-58.971704	$1.52 \cdot 10^{-4}$	-3.818
Ph	-58.974703	$2.97 \cdot 10^{-3}$	-2.527

Ароматические сульфонилхлориды  $XPhSO_2Cl$  в 1% водном диоксане подвергаются щелочному гидролизу [27] по схеме (1) с образованием сульфоноватов. По выборке с заместителями электронодонорного характера наблюдается корреляция (6) антибатного характера:

$$\lg K_{hydr} = (-1524 \pm 466) - (25.8 \pm 97.9) \cdot V_{esp},$$

$$X = H, 4-F, 4-Me, 4-MeO, R = -0.917, SD = 0.09, N = 4, P = 0.083. \quad (6)$$

Таким образом, скорость гидролиза сульфонилхлоридов увеличивается при увеличении отрицательного значения МЭП, что свидетельствует об ускорении реакции донорами, а это, в свою очередь, указывает на анионоидный отрыв уходящей группы (хлорид-аниона) как стадию, определяющую скорость, поскольку хлорид-анион — плохая уходящая группа [22].

Однако сульфонилфториды  $XPhSO_2F$  при гидролизе в водном диоксане образуют свою реакционную серию с положительным трендом зависимости (7) между  $V_{esp}$  и  $\lg K_{hydr}$  (табл. 4, рис. 5), что согласуется с влиянием вида уходящей группы на положение переходного состояния на координате реакции и свидетельствует о сохранении ее механизма при смене донорных заместителей на акцепторные.

Поскольку фторид-анион — плохая уходящая группа, ей требуется поддержка отрицательным МЭП, тем не менее именно уменьшение отрицательного его значения реакцию ускоряет. По всей видимости, связано это с характером переходного состояния: тесное оно или рыхлое по классификации [3]. Кроме того, атакующая частица — молекула воды — жесткий нуклеофил, а уходящая группа — жесткий нуклеофуг, что с точки зрения реакционной способности является выигрышным: жесткие реагенты быстрее вытесняют жесткие уходящие группы [23, 24].

Уменьшение отрицательного значения МЭП облегчает нуклеофильную атаку молекулы воды, слабо воздействуя на скорость отрыва уходящей группы при электрофильном катализе (водородной связью) второй молекулой воды, которая как жесткий реагент хорошо связывает фторид-анион.

Линейная корреляция  $\lg K_{hydr}$  на  $\sigma$ -константы Гаммета в данном случае имеет аналогичные характер и тренд ( $R = 0.998$ ) и величину  $\rho$ -параметра  $+2.79$  [15], что свидетельствует об ускорении реакции акцепторами и слабом развитии заряда на реакционном центре (атоме S) в переходном состоянии.

Таблица 4

**МЭП на атоме S(VI) и реакционная способность  $XPhSO_2F$  в реакции щелочного гидролиза**

X	$V_{esp}$ , a.u.	$K_{hydr}$ , 1/моль • с [15]	$\lg K_{hydr}$
4-OMe	-58.982641	1.1	0.041
4-Me	-58.979562	2.9	0.462
H	-58.974702	8.2	0.914
4-Cl	-58.965871	26.5	1.423
4-NO <sub>2</sub>	-58.946881	1100	3.041

*Примечание.* T = 25 °C, H<sub>2</sub>O — диоксан (55 : 45 мас. %), C(OH) =  $3 \cdot 10^{-2}$  M, спектрофотометрия stop-flow.

$$\lg K_{\text{hydr}} = (4821.9 \pm 278.6) + (81.75 \pm 4.72) \cdot \text{Vesp},$$

$$R = 0.9967, SD = 0.126, N = 4, P = 0.0033. \quad (7)$$

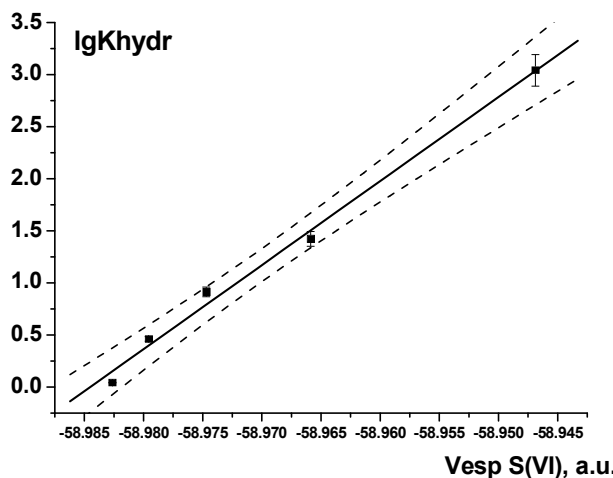


Рис. 5. Корреляция реакционной способности  $\text{XPhSO}_2\text{F}$  при гидролизе в системе  $\text{H}_2\text{O}$  — диоксан как функции МЭП на атоме S(VI)

В свою очередь, изотопный обмен в  $\text{XPhSO}_2\text{Cl}$  изотопа  $^{35}\text{Cl}$  на  $^{36}\text{Cl}$  при действии  $\text{Li}^{36}\text{Cl}$  в среде сульфолана при  $45^\circ\text{C}$  [17] подчиняется той же закономерности, как и процесс гидролиза сульфонилфторидов (табл. 5, рис. 6). Несмотря на различие в уходящих группах (Cl и F), симбатная зависимость (8) между  $\lg K$  изотопного обмена и МЭП реакционного центра — атома сульфонильной серы — свидетельствует в пользу согласованного механизма  $\text{S}_{\text{N}}2$  с нуклеофильной атакой, лимитирующей скорость реакции.

Таблица 5

МЭП S(VI) и константа (K) скорости изотопного обмена  $^{35}\text{Cl}$  на  $^{36}\text{Cl}$  в  $\text{XPhSO}_2\text{Cl}$  при действии  $\text{Li}^{36}\text{Cl}$  в среде сульфолана ( $T = 45^\circ\text{C}$ )

X	Vesp, a.u.	K, л/моль • с [17]	lgK
3-NO <sub>2</sub>	-58.969660	0.659	-0.181
3-COOH	-58.985984	0.415	-0.382
4-Br	-58.984695	0.383	-0.417
H	-58.992861	0.266	-0.575
4-Me	-58.996942	0.244	-0.613
4-MeO	-58.999876	0.186	-0.731

Однако чувствительность реакции изотопного обмена к изменению Vesp, количественно выражаемая коэффициентом при Vesp в корреляционных зависимостях (6) и (7), существенно меньше (17.6) по сравнению с таковой для реакции гидролиза сульфонилфторидов (81.75). Наблюдаемое явление соответствует соотношению между активностью и селективностью реагентов, поскольку незаряженная вода гораздо более слабый нуклеофил по сравнению с хлорид-анионом, который несет полный отрицательный заряд. Возможно, влияет и различие температур реакции ( $45^\circ\text{C}$  для изотопного обмена и  $25^\circ\text{C}$  для гидролиза сульфонилфторидов), так как увеличение температуры уменьшает субстратную селективность реакции и, следовательно, чувствительность реакции к изменению МЭП.

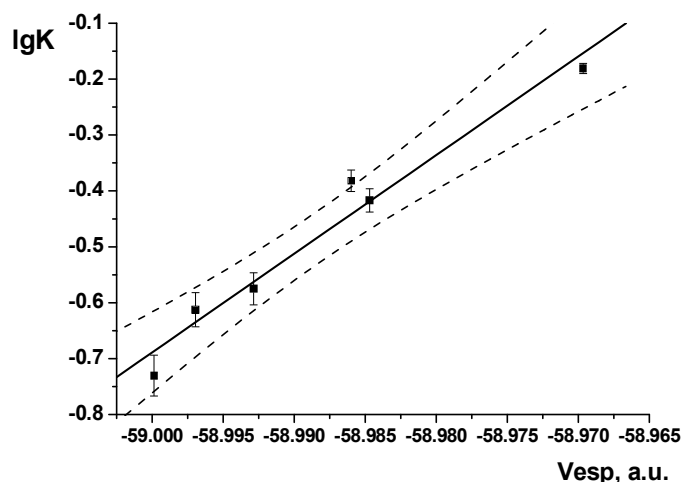


Рис. 6. Константа скорости изотопного обмена  $^{35}\text{Cl}$  на  $^{36}\text{Cl}$  в  $\text{XPhSO}_2^{35}\text{Cl}$  в среде сульфолана как функция МЭП  $S(\text{VI})$

$$\lg K = (1040.5 \pm 100.3) + (17.6 \pm 1.7) \cdot \text{Vesp},$$

$$R = 0.982, \text{SD} = 0.041, N = 6, P = 4.8 \cdot 10^{-4}. \quad (8)$$

### Заключение

Таким образом, теория функционала плотности позволяет достаточно точно определить молекулярный электростатический потенциал на реакционных центрах, что, в свою очередь, дает возможность отразить изменения механизма сольволиза ароматических сульфонилогалогенидов и выяснить детали изменения структуры переходных состояний при реализации механизмов, отличных от чистого  $\text{S}_{\text{N}}2$ -механизма. Молекулярный электростатический потенциал представляется весьма чувствительным к изменениям структуры арилсульфонилогалогенидов дескриптором реакционной способности, несмотря на его статический характер.

### Библиографический список

1. Ахназарова С. Л., Кафаров В. В. Оптимизация эксперимента в химии и химической технологии. М.: Высш. шк., 1985. 327 с.
2. Гордеев Е. Г. Влияние электронного строения ряда дикарбаклозо-додекарборанов(12) на их реакционную способность: автореф. дис. ... канд. хим. наук / МГАТХТ им. М. В. Ломоносова. М., 2007. 26 с.
3. Днепровский А. С., Темникова Т. С. Теоретические основы органической химии. Л.: Химия. 1991. 560 с.
4. Иванов С. Н. Эффекты среды в реакциях сольволиза функциональных производных ароматических сульфокислот: дис. ... д-ра хим. наук. Иваново, 2004. 328 с.
5. Крылов Е. Н. Дескрипторы органических реакций: квантово-химические индексы реакционной способности // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 39—53.
6. Курицын Л. В., Кустова Т. П., Садовников А. И., Калинина Н. В., Клюев М. В. Кинетика реакций ацильного переноса. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2006. 260 с.
7. Чиждова З. М. Структура молекул некоторых замещенных бензолсульфогалогенидов по данным метода газовой электронографии: автореф. дис. ... канд. хим. наук. Иваново, 2003. 16 с.
8. A Matter of Density Exploring the Electron Density Concept in the Chemistry, Biological and Materials Sciences / ed. by N. Sukumar. New York: Wiley-VCN, 2013. 318 p.

9. Arcoria A., Ballistrelli F. P., Spina E., Tomaselli G. A. Hydrolysis of substituted thiophensulphonyl halides in water — acetone mixture // *J. Chem. Soc. Perkin Trans. II*. 1988. P. 1793—1798.
10. Baerends E. J., Ziegler T., Autschbach J. et al. ADF2014. SCM Theoretical Chemistry. Vrije University. Amsterdam. The Netherlands. 2014. URL: <http://www.scm.com> (дата обращения: 22.01.2016).
11. Ballistrelli F. P., Cantone A., Maccarone E., Tomaselli G. A., Tripolone M. Hydrolysis and alcoholysis of aromatic sulphonyl chlorides // *J. Chem. Soc. Perkin Trans. II*. 1981. P. 438—441.
12. Bonaccorsi R., Scrocco E., Tomasi J. Molecular SCF calculations for the ground state of some three-membered ring molecules:  $(\text{CH}_2)_3$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{NH}$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{NH}_2^+$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{O}$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{S}$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2$  and  $\text{N}_2\text{CH}_2$  // *J. Chem. Phys.* 1970. Vol. 52, № 10. P. 5270—5284.
13. Campanelli A. R., Domenicano A., Ramondo F., Hargittai I. Group electronegativities from benzene ring deformations: a quantum chemical study // *J. Phys. Chem. A*. 2004. Vol. 108, № 22. P. 4940—4948.
14. Cheshmedzhieva D., Ilieva S., Hadjieva B., Trayanova T., Galabov B. Reactivity of acetanilides in the alkaline hydrolysis reaction: theory and experiment // *Mol. Phys.* 2009. Vol. 107, № 8—12. P. 1187—1192.
15. Ciuffarin E., Senatore L. A Hammett study of alkaline hydrolysis of benzene sulphonyl fluoride // *Tetrahedron Letters*. 1974. № 17. P. 1635—1636.
16. Concepts and Methods in Modern Theoretical Chemistry: Electronic Structure and Reactivity / ed. by S. K. Ghosh, P. K. Chattaraj. New York: CRC Press, 2013. 450 p.
17. Cremlyn R. J., Gore P. H., Ikejiani A. O., Morris D. F. C. Kinetics of chlorine-isotopic exchange between lithium chloride and substituted benzene sulphonyl chloride in sulfolane solution // *J. Chem. Res. S*. 1982. P. 194—195.
18. Geerlings P., De Proft F., Langenaeker W. Conceptual density functional theory // *Chem. Rev.* 2003. Vol. 103, № 5. P. 1793—1873.
19. Hohenberg P., Kohn W. Inhomogenous electron gas // *Phys. Rev.* 1964. Vol. 136, № 3. P. B864—B871.
20. Lee I., Koo I. S., Kang H. K.  $\text{S}_{\text{N}}2$  transition state variation in the benzenesulfonyl chloride solvolysis // *Bulletin of Korean Chemical Society*. 1981. Vol. 2, № 2. P. 41—45.
21. Molecular Electrostatic Potentials: Concepts and Applications / ed. by J. S. Murray, K. Sen. Amsterdam: Elsevier, 1996. 664 p.
22. Parr R. G., Yang W. Density Functional Theory of Atoms and Molecules. New York: Oxford University Press, 1989. 352 p.
23. Pearson R. G. Chemical Hardness: Applications from Molecules to Solids. Weinheim: Wiley-VCH, 1997. 198 p.
24. Pearson R. G. Hard and soft acids and bases. The evolution of a chemical concept // *Coord. Chem. Rev.* 1990. Vol. 100. P. 403—425.
25. Politzer P., Murray J. S. Molecular electrostatic potentials: some observations // *Concepts and Methods in Modern Theoretical Chemistry* / ed. by S. K. Ghosh, P. K. Chattaraj. New York: CRC Press, 2013. P. 181—199.
26. Politzer P., Murray J. S. The fundamental nature and role of the electrostatic potential in atoms and molecules // *Theor. Chem. Acc.* 2002. Vol. 108, № 3. P. 134—142.
27. Rogne O. Kinetic of the neutral and alkaline hydrolysis of aromatic sulphonyl chlorides in water // *J. Chem. Soc. B*. 1968. P. 1294—1296.
28. Stewart R. F. On the mapping of electrostatic properties from Bragg diffraction data // *Chem. Phys. Lett.* 1979. Vol. 65, № 2. P. 335—342.
29. Theoretical Aspects of Chemical Reactivity / ed. by A. Toro-Labbe. Amsterdam: Elsevier, 2007. 321 p.
30. Tomasi J., Mennucci B., Cammi R. Quantum mechanical continuum solvation models // *Chem. Rev.* 2005. Vol. 105, № 8. P. 2999—3093.
31. Wiberg K. B., Rablen P. R. Comparison of atomic charges derived via different procedures // *J. Comput. Chem.* 1993. Vol. 14, № 2. P. 1504—1518.

## ОБ ОДНОМ ВИДЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ, МОНОГЕННЫХ ПО НЕСКОЛЬКИМ ФУНКЦИЯМ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^n$

Вводится понятие гиперкомплексной функции, моногенной по нескольким функциям в полидиске  $n$ -мерного комплексного пространства  $\mathbb{C}^n$ . Получены интегральные представления, разложение в ряд Тейлора. Приводится решение переопределенной системы, являющейся обобщением переопределенной системы Коши — Римана из теории функций нескольких комплексных переменных.

**Ключевые слова:** теория функций в полидиске, моногенность по нескольким функциям, система Коши — Римана.

The notion of hypercomplex function, which is monogenic in several functions, are introduced in a polydisc the  $n$ -dimensional complex space  $\mathbb{C}^n$ . The integral representations, Taylor series expansions for this function are obtained. We found a solution to the overdetermined system, which is a generalization of the overdetermined Cauchy — Riemann system from the theory of functions of several complex variables.

**Key words:** function theory in polydisc, monogeneity in the several functions, Cauchy — Riemann system.

### 1. Предварительные сведения

Мы изложим основные обозначения и определения, которыми будем пользоваться.

$\mathbb{C}$  — поле комплексных чисел.

$\mathbb{C}^n$  — декартово произведение  $n$  ( $n$  — натуральное число) экземпляров  $\mathbb{C}$ , т. е.  $\mathbb{C}^n$  представляет собой  $n$ -мерное векторное пространство над  $\mathbb{C}$  со стандартным ортонормированным базисом  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , где  $e_k$  — упорядоченный набор  $n$  чисел с 1 на  $k$ -м месте и с 0 на всех остальных местах.

Точками  $\mathbb{C}^n$  являются упорядоченные наборы  $n$  независимых комплексных чисел  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , где  $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ ,  $i^2 = -1$ .

Каждая точка  $z \in \mathbb{C}^n$  является также точкой пространства  $\mathbb{R}^{2n}$ , т. е.

$$z = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n).$$

$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n \subset \mathbb{C}^n$ , где  $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — плоская область, лежащая в области изменения комплексной переменной  $z_k = x_k + iy_k$ , будем называть *полицилиндрической областью*.

$\partial_0 G = \partial G_1 \times \partial G_2 \times \dots \times \partial G_n$ , где  $\partial G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — граница области  $G_k$ , называется *остовом* области  $G$ .

Если все области  $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) *круги*, то область  $G$  будем называть *поликругом*.

Таким образом, если  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$  — фиксированная точка и  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ , где  $r_k > 0$  — целые числа, то множество

$$G(a; r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k - a_k| < r_k, k = 1, \dots, n\}$$

называется *открытым поликругом* с центром в точке  $a \in \mathbb{C}^n$  и радиусами  $r_k$ .

$A$  — ассоциативная и коммутативная алгебра с единицей конечного ранга над полем  $\mathbb{C}$ .

$\Omega$  — конечная область комплексной плоскости  $z = x + iy$  с кусочно гладкой границей  $\partial\Omega$ .

$\mathbb{C}^k(\Omega)$  — пространство комплекснозначных функций в  $\Omega$ , обладающих непрерывными частными производными до порядка  $k$  включительно,  $0 \leq k < \infty$ .

$\mathbb{C}_0^k(G)$  — множество функций из  $\mathbb{C}^k(G)$ , равных нулю вне некоторого компактного подмножества в  $G$ .

$\mathbb{C}^k(G, A)$  — множество всех отображений  $f: G \rightarrow A$  таких, что для любого непрерывного линейного функционала  $L$  на  $A$  мы имеем  $L \circ f \in \mathbb{C}^k(G)$ .

Пусть  $p_j(z_j)$  и  $q_j(z_j) \in \mathbb{C}^1(G_j, A)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $z_j = x_j + iy_j \in G_j$ .

Введем операторы дифференцирования  $\partial/\partial p_j$ ,  $\partial/\partial q_j$ :

$$\delta_j \frac{\partial}{\partial p_j} = 2i \left( \frac{\partial q_j}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial q_j}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right), \quad (1.1)$$

$$\delta_j \frac{\partial}{\partial q_j} = -2i \left( \frac{\partial p_j}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial p_j}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right), \quad (1.2)$$

где  $\partial/\partial z_j$  и  $\partial/\partial \bar{z}_j$  — известные из комплексного анализа операторы дифференцирования (формальные производные):

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right). \quad (1.3)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = i \left( \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right).$$

В (1.1) и (1.2)  $\delta_j$  имеет вид

$$\delta_j = -2i \left( \frac{\partial p_j}{\partial z_j} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial p_j}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial q_j}{\partial z_j} \right). \quad (1.4)$$

Здесь и в дальнейшем мы всегда считаем, что элемент  $\delta_j^{-1}$ , обратный к элементу  $\delta_j \in A$ , существует в каждой точке области  $G_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Пусть  $f(z) \in \mathbb{C}^1(G, A)$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in G$ . Имея [8, с. 41] для дифференциала  $df$ , в обозначениях (1.3), представление

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j = \partial f + \bar{\partial} f, \quad (1.5)$$

где  $\partial f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$  — дифференциальная форма типа (1, 0),

$\bar{\partial} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$  — дифференциальная форма типа (0, 1),



нетрудно сосчитать, что в обозначениях (1.1), (1.2) и (1.4) представление (1.5) примет вид

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j} dp_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_j} dq_j = \partial_p f + \partial_q f, \quad (1.6)$$

где  $\partial_p f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_j} dp_j$ ,  $\partial_q f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_j} dq_j$  — дифференциальные формы 1-го порядка.

**Определение 1.1.** [8, с. 42]. Функция  $f \in C^1(G)$  (см. (1.5)) называется голоморфной в области  $G \subset \mathbb{C}^n$ , если в каждой точке  $z \in G$  выполняются уравнения Коши — Римана, т. е.  $\partial f / \partial \bar{z}_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Определение 1.2.** Функция  $u(z) = \sum_{k=1}^n u^k(z) e_k \in \mathbb{C}(G, A)$ , где  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — база алгебры  $A$ ,  $u^k(z)$  — комплекснозначные функции от  $z \in G$ , называется непрерывной (дифференцируемой, голоморфной и т. п.) в области  $G$ , если каждая компонента  $u^k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) непрерывна (дифференцируема, голоморфна и т. п.) в области  $G$ .

$$\|u\|_A = \sum_k \sup_{z \in G} |u^k(z)| \text{ — норма в алгебре } A. \quad (1.7)$$

Обозначим [5] через  $\mathbb{C}_q(G, A)$  ( $\mathbb{C}_p(G, A)$ ) — пространство функций  $f \in \mathbb{C}(\bar{G}, A)$ , для которых операция

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial q_j} &= - \lim_{\partial G_j \rightarrow z_j} \frac{\delta_j^{-1}}{\text{mes} G_j} \int_{\partial G_j} f(\zeta) d_{\zeta_j} p_j \\ \left( \frac{\partial f}{\partial p_j} &= \lim_{\partial G_j \rightarrow z_j} \frac{\delta_j^{-1}}{\text{mes} G_j} \int_{\partial G_j} f(\zeta) d_{\zeta_j} q_j \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$j = 1, \dots, n,$

где  $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \partial_0 G$ , приводит к непрерывной функции.

**Определение 1.3.** Функцию  $f \in \mathbb{C}(\bar{G}, A)$  будем называть моногенной по функциям  $p_j(q_j) \in C^1(G_j, A)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) в  $G$ , если в каждой точке  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in G$  выполняются условия  $\partial f / \partial q_j = 0$  ( $\partial f / \partial p_j = 0$ ).

Производные  $\partial f / \partial q_j$ ,  $\partial f / \partial p_j$  в определении (1.3) понимаем в смысле (1.8). Если же  $f \in C^1(\bar{G}, A)$ , то производные, определяемые по формулам (1.1), (1.2) и (1.8), совпадают. В этом случае функцию  $f$  будем называть [7]  $F$ -моногенной по функциям  $p_j$  ( $q_j$ ).

**Замечание 1.1.** В конечной области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  комплексной плоскости  $z = x + iy$  рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.9)$$

где  $p, w \in C^1(\Omega, A)$ .

По определению (1.3) (см. (1.2)) решение  $w \in \mathbb{C}^1(\Omega, A)$  уравнения (1.9) является  $F$ -моногенной функцией по функции  $p$  в  $\Omega$ .

Для комплекснозначных функций  $p, w \in \mathbb{C}^1(\Omega)$  представим (1.9) в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \mu(z) \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где  $\mu(z) = (\partial p / \partial z)^{-1} (\partial p / \partial \bar{z})$ .

Если  $|\mu(z)| \leq \gamma < 1$ , то имеем уравнение Бельтрами [1, с. 80; 2, с. 109], решение  $w$  которого осуществляет квазиконформное отображение плоских областей. В уравнении (1.9) элемент  $(\partial p / \partial z)^{-1}$ , обратный к элементу  $\partial p / \partial z$ , вообще не обязан существовать.

## 2. Интегральные формулы Коши

Пусть в области  $G_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) функции  $p_j \in \mathbb{C}^1(\overline{G_j}, A)$  удовлетворяют условиям

$$4 \frac{\partial p_j}{\partial z_j} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad (\text{I})$$

$$[(\partial / \partial z_j + \partial / \partial \bar{z}_j) p_j]^{-1} \text{ существует в каждой точке } z_j \in G_j. \quad (\text{II})$$

Здесь условия (I), (II) представляют собой соответствующие условия из [5], записанные в обозначениях (1.3).

**Теорема 2.1.** Пусть: 1)  $G$  — открытый поликруг в  $\mathbb{C}^n$ ; 2) функции  $p_j \in \mathbb{C}^1(G_j, A)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) удовлетворяют в области  $\overline{G_j}$  условиям (I), (II); 3)  $f \in \mathbb{C}_q(\overline{G}, A)$  и моногенна по каждой функции  $p_j$ , когда другие  $p_k$  ( $k \neq j$ ) фиксированы в  $G$ . Тогда в каждой точке  $(z_1, \dots, z_n) = z \in G$

$$F(z) = f(z) \prod_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial z_j} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} \frac{f(\zeta) \prod_{j=1}^n \frac{\partial p_j}{\partial \zeta_j}}{\zeta - z} d\zeta, \quad (2.1)$$

где  $\zeta - z = (\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)$ ,  $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$ ,  $(\zeta, z) \in \partial_0 G \times G$ .

*Доказательство.* Согласно [5] и условий теоремы следует, что функция  $f$  является  $F$ -моногенной по каждой функции  $p_j$  при фиксированных  $p_k$  ( $k \neq j$ ) в  $G$ . Отсюда и [5] нетрудно убедиться, что функции  $f(\partial p_j / \partial z_j)$  голоморфны от  $z_j$  в области  $G_j$ , откуда функция  $F(z) = f(z) \prod_{j=1}^n (\partial p_j / \partial z_j)$  голоморфна от  $z$  в  $G$ . Теперь представление (2.1) следует из теории функций нескольких комплексных переменных (см., напр.: [8, с. 46; 9, с. 28]). Теорема доказана.

**Замечание 2.1.** В полученном представлении выразить  $f(z)$  нельзя, так как элементы  $(\partial p_j / \partial z_j)^{-1}$ , обратные к элементам  $\partial p_j / \partial z_j$  в  $G_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) не обязаны существовать.

Пусть  $p(x, y) \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}, A)$  удовлетворяет в области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  условиям (I), (II). Обозначив  $\lambda = (\partial p / \partial x)^{-1} \partial p / \partial y$ , получим [5], что  $\lambda = \text{const} \in A$ ,  $\lambda^2 = -1$ . Введем элементы алгебры  $A$

$$e = (1/2)(1 - i\lambda), \quad \bar{e} = (1/2)(1 + i\lambda). \quad (2.2)$$

Непосредственно доказываем, что элементы  $e, \bar{e} \in A$  являются ортогональными идемпотентами, т. е.

$$e^2 = e, \quad \bar{e}^2 = \bar{e}, \quad e\bar{e} = 0, \quad e + \bar{e} = 1, \quad e - \bar{e} = i\lambda. \quad (2.3)$$

Теперь в силу (2.3) и теоремы 4.2 из [5] сразу следует

**Теорема 2.2.** Пусть: 1) функция  $p(x, y) \in \mathbb{C}^1(\bar{\Omega}, A)$  в области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  удовлетворяет условиям (I), (II); 2)  $f \in \mathbb{C}_q(\Omega, A)$  и моногенна по  $p$  в  $\Omega$ . Тогда в каждой точке  $(x, y) = z \in \Omega$

$$f(x, y) = f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\zeta) \left[ \frac{d\zeta}{\zeta - z} e - \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \bar{e} \right], \quad (2.4)$$

где  $z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta, (\zeta, z) \in \partial\Omega \times \Omega$ .

Имея (см. (2.2))

$$e_j = 2^{-1}(1 - i\lambda_j), \quad \bar{e}_j = 2^{-1}(1 + i\lambda_j), \quad \lambda_j = \left( \frac{\partial p_j}{\partial x_j} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial p_j}{\partial y_j} \quad (2.5)$$

$$(j = 1, \dots, n)$$

и теорему 2.2, так же как в многомерном комплексном анализе (см., напр.: [9, с. 29; 11, с. 9]), доказываем следующую теорему.

**Теорема 2.3.** Пусть: 1)  $G$  — открытый поликруг в  $\mathbb{C}^n$ ; 2) функции  $p_j \in \mathbb{C}^1(\bar{G}_j, A)$  удовлетворяют в области  $\bar{G}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) условиям (I), (II); 3)  $f \in \mathbb{C}_q(\bar{G}, A)$  и моногенна по каждой функции  $p_j$ , когда другие  $p_k$  ( $k \neq j$ ) фиксированы. Тогда в каждой точке  $(z_1, \dots, z_n) = z \in G$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} f(\zeta) (\Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \dots \wedge \Omega_n), \quad (2.6)$$

где  $\Omega_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) — дифференциальные формы, с коэффициентами из  $A$

$$\Omega_j = \Omega_j(\zeta_j, \bar{\zeta}_j; z_j, \bar{z}_j) = \frac{d\zeta_j}{\zeta_j - z_j} e_j - \frac{d\bar{\zeta}_j}{\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j} \bar{e}_j,$$

$e_j$  и  $\bar{e}_j$  имеют вид (2.5), произведения  $\Omega_j$  осуществляются следующим способом: элементы  $e_j$  и  $\bar{e}_j$  перемножаются по закону алгебры  $A$ , остальные выражения — внешним образом [4, с. 36].

Ясно, что самый простой вид формула (2.6) примет в случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ . Действительно, учитывая (2.3), получим

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} f(\zeta) \left[ \frac{d\zeta}{\zeta - z} e - \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \bar{e} \right] = F_1(z) + F_2(\bar{z}), \quad (2.7)$$

где

$$\zeta - z = (\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n), \quad \bar{\zeta} - \bar{z} = (\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) \dots (\bar{\zeta}_n - \bar{z}_n),$$

$$d\zeta = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_n, \quad d\bar{\zeta} = d\bar{\zeta}_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}_n,$$

$$F_1(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} e$$

голоморфна от  $z = (z_1, \dots, z_n)$  в  $G$ ,

$$F_2(z) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} f(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - \bar{z}} \bar{e}$$

антиголоморфна от  $z$  в  $G$ .

Представим еще две теоремы из комплексного анализа, которые можно известным способом перефразировать для функции, моногенной по нескольким функциям в поликруге  $G \subset \mathbb{C}^n$ .

**Теорема 2.4.** Пусть  $K$  — компакт в  $\mathbb{C}$  с замкнутой ориентированной границей  $\partial K$  и со связным дополнением  $K^c = \mathbb{C} \setminus K$ . Пусть функция  $\varphi$  непрерывна на  $K$  и голоморфна в каждой внутренней точке  $K$ . Тогда функция

$$w(x, y) = w(z) = \iint_K \varphi(x + \xi, y + \eta) d\xi d\eta \quad (2.8)$$

голоморфна от  $z$  в  $K$ .

*Доказательство.* Из условия теоремы [3, с. 109] следует, что существует последовательность  $P_n = P_n(x + \xi, y + \eta)$  многочленов, равномерно сходящаяся на каждом компактном подмножестве в  $\mathbb{C}$  к функции  $\varphi = \varphi(x + \xi, y + \eta)$ . Обозначим через

$$w_n(x, y) = \iint_K P_n(x + \xi, y + \eta) d\xi d\eta, \quad (x, y) \in K.$$

Согласно формуле Грина имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} w_n(x, y) = \iint_K \frac{\partial}{\partial \xi} P_n d\xi d\eta = \int_{\partial K} P_n d\eta.$$

Отсюда

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} w_n(x, y) dx = w_n(x, y) - w_n(x_0, y) = \int_{x_0}^x \left( \int_{\partial K} P_n d\eta \right) dx.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим

$$w(x, y) - w(x_0, y) = \int_{x_0}^x \left( \int_{\partial K} \varphi d\eta \right) dx,$$

$x_0 \in K$  — фиксированная точка.

Из последней формулы сразу следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, y) = \int_{\partial K} \varphi d\eta = -i \int_{\partial K} \varphi i d\eta \quad (i^2 = -1). \quad (2.9)$$

Рассуждая аналогично, получим

$$\frac{\partial}{\partial y} w(x, y) = - \int_{\partial K} \varphi d\xi. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) имеем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) w(x, y) = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \varphi(x + \xi, y + \eta) d\zeta, \quad (2.11)$$

$$\zeta = \xi + i\eta.$$

Поскольку интеграл справа в (2.11) по теореме Коши равен нулю, теорема доказана.

В силу теоремы 2.4 обычным способом (см., напр.: [10, с. 10–12; 11, с. 8–10]) доказывается

**Теорема 2.5 (Вейерштрасс).** Пусть: 1)  $G$  — открытый поликруг в  $\mathbb{C}^n$ ; 2)  $K$  — компакт в  $G$  со связным дополнением  $G \setminus K$ ; 3) функция  $\varphi$  непрерывна на  $K$  и голоморфна в каждой внутренней точке  $K$ . Тогда функция

$$w(x, y) = w(z) = \int_K \varphi(x_1 + \xi_1, y_1 + \eta_1, \dots, x_n + \xi_n, y_n + \eta_n) d\mu(\zeta),$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $z_k = x_k + iy_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $\mu(\zeta)$  — мера на  $K$ , голоморфна от  $z$  в  $K$ .

### 3. Ряд Тейлора

**Определение 3.1.** Функцию  $f \in \mathbb{C}(G, A)$  будем называть аналитической от функции  $\varphi \in \mathbb{C}(G, A)$  в области  $G \subset \mathbb{C}^n$ , если для любой точки  $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in G$  существует открытый поликруг  $U(z^0; r)$  с центром в точке  $z^0$ , в котором она является суммой абсолютно и равномерно сходящегося ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\varphi(z) - \varphi(z^0))^k,$$

где  $c_k$  — постоянные элементы алгебры  $A$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n) \in U(z^0; r)$ .

Под абсолютной и равномерной сходимостью ряда понимается сходимость ряда из норм (1.7) элементов ряда.

**Теорема 3.1.** Пусть: 1)  $G$  — открытый поликруг в  $\mathbb{C}^n$ ; 2) функция  $f \in \mathbb{C}_q(\overline{G}, A)$  и моногенна по каждой функции  $p_j \in \mathbb{C}^1(\overline{G}_j, A)$ , когда другие  $p_k$  ( $k \neq j$ ) фиксированы; 3) функции  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) таковы, что имеет место интегральная формула (2.7). Тогда  $f$  — функция, аналитическая от функции  $\varphi(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} + \lambda \frac{z-\bar{z}}{2i}$  в области  $G$ .

*Доказательство.* Из результатов комплексного анализа (см., напр.: [9, с. 30; 11, с. 10]), примененных к представлению (2.7), следует, что

$$f(z) = \left( \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k (z - z^0)^k \right) e + \left( \sum_{|k|=0}^{\infty} \bar{a}_k (\bar{z} - \bar{z}^0)^k \right) \bar{e}, \quad (3.1)$$

где  $a_k, \bar{a}_k \in A$  вычисляются по известным формулам

$$a_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z^0)^{k+1}}, \quad \bar{a}_k = -\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 G} \frac{f(\zeta) d\bar{\zeta}}{(\bar{\zeta} - \bar{z}^0)^{k+1}}, \quad (3.2)$$

где  $k = (k_1, \dots, k_n)$  — мультииндекс, т. е.  $k_j \geq 0$  целые числа,  $|k| = k_1 + \dots + k_n$ ,  $k + 1 = (k_1 + 1, \dots, k_n + 1)$ ,  $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$ , причем каждый

из рядов в (3.1) абсолютно и равномерно сходится на любом компактном подмножестве поликруга  $G$  и представление  $f(z)$  рядом (3.1) единственно.

В силу свойств элементов  $e, \bar{e} \in A$  (2.3), функцию  $f(z)$  (3.1) можно преобразовать к виду

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} (a_k e + \overline{a_k e}) \left[ (z - z^0) e + (\bar{z} - \overline{z^0}) \bar{e} \right]^k. \quad (3.3)$$

Теперь, согласно (2.2), преобразуем каждый сомножитель справа в (3.3). Имеем

$$\begin{aligned} a_k e + \overline{a_k e} &= \frac{a_k + \overline{a_k}}{2} + \lambda \frac{a_k - \overline{a_k}}{2i} = c_k, \\ (z - z^0) e + (\bar{z} - \overline{z^0}) \bar{e} &= \\ &= \left( \frac{z + \bar{z}}{2} + \lambda \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) - \left( \frac{z^0 + \overline{z^0}}{2} + \lambda \frac{z^0 - \overline{z^0}}{2i} \right) = \varphi(z) - \varphi(z^0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, в данных обозначениях функция  $f(z)$  (3.3) примет вид

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k [\varphi(z) - \varphi(z^0)]^k. \quad (3.5)$$

Теорема доказана.

**Определение 3.2.** Степенной ряд (3.5), коэффициенты которого вычисляются по формулам (3.2), (3.4), будем называть рядом Тейлора функции  $f \in \mathbb{C}(\overline{G}, A)$ , моногенной по функциям  $p_j \in \mathbb{C}^1(\overline{G}_j, A)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) в поликруге  $U(z^0; r) \subset G$ .

**Замечание 3.1.** Интегральное представление (2.7) позволяет многие результаты теории функций нескольких комплексных переменных соответствующим образом перенести на функции класса  $\mathbb{C}_q$ , моногенные по нескольким функциям в поликруге  $G \subset \mathbb{C}^n$ .

#### 4. Обобщение переопределенной системы дифференциальных уравнений Коши — Римана в поликруге

Рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений

$$\delta_j \frac{\partial w}{\partial q_j} = f_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

для которой выполнены условия совместности

$$\delta_k \frac{\partial f_j}{\partial q_k} - \delta_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Здесь  $\delta_j \in \mathbb{C}^1(G_j, A)$ ,  $\partial w / \partial q_j$  определяются соответственно по (1.4), (1.8),  $w \in \mathbb{C}_q(G, A)$  — неизвестная функция, а  $f_j \in \mathbb{C}_0^k(\mathbb{C}^n, A)$  — заданные функции с компактным носителем  $K$  в поликруге

$$G = G(0; R) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_\gamma| < R_\gamma, \gamma = 1, \dots, n\}.$$

Отметим, что в обозначениях (1.3) условия (4.2) имеют вид

$$-2i \left[ \left( \frac{\partial p_k}{\partial z_k} \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} + \frac{\partial p_j}{\partial z_j} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} \right) - \left( \frac{\partial p_j}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial f_k}{\partial z_j} + \frac{\partial p_k}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \right) \right] = 0.$$

Систему (4.1) с условиями (4.2) можно рассматривать как обобщение системы дифференциальных уравнений Коши — Римана из многомерно-го комплексного анализа, изученной Л. Хёрмандером [8, с. 51] (см. также: [6, с. 348—350]).

**Теорема 4.1.** Пусть: 1)  $G$  — открытый поликруг в  $\mathbb{C}^n$  ( $n > 1$ ); 2)  $K \subset G$  — компакт в  $G$  со связным дополнением  $G \setminus K$ ; 3) функции  $p_j \in \mathbb{C}^1(\bar{G}_j, A)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) удовлетворяют в области  $G_j$  условиям (I), (II); 4) функции  $f_j \in \mathbb{C}_0^k(\mathbb{C}^n; A)$  ( $k > 1$ ) удовлетворяют условиям (4.2). Тогда существует единственная функция  $w \in \mathbb{C}_q(\mathbb{C}^n, A)$ , удовлетворяющая уравнениям (4.1).

Доказательство теоремы проводится следуя Хёрмандеру [8, с. 51] с использованием результатов [5].

*Доказательство.* Положим

$$w(z) = \frac{1}{2\pi\lambda_1} \iint f_1(\zeta_1, z_2, \dots, z_n) \left( \frac{\partial p_1(\zeta_1)}{\partial \xi_1} \right)^{-1} \Omega_1(\zeta_1, \bar{\zeta}_1; z_1, \bar{z}_1) d\xi_1 \wedge d\eta_1, \quad (4.3)$$

где

$$\Omega_1(\zeta_1, \bar{\zeta}_1; z_1, \bar{z}_1) = \frac{1}{\zeta_1 - z_1} e_1 + \frac{1}{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1} \bar{e}_1, \quad \zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1,$$

$e_1$  и  $\bar{e}_1$  имеют вид (2.5).

Согласно теореме 4.1 из [5] функция  $w(z) \in \mathbb{C}_{q_1}(\mathbb{C}^n, A)$  и удовлетворяет уравнению  $\delta_1(\partial w / \partial q_1) = f_1(z)$ . Ясно, что если сумма  $R_1 + \dots + R_n$  достаточно велика, то  $w(z) = 0$ . Далее, для каждого  $k = 2, \dots, n$ , применив к обеим частям равенства (4.3) операцию  $\partial / \partial q_k$ , в силу условий (4.2) получим

$$\begin{aligned} \delta_k \frac{\partial w}{\partial q_k} &= \frac{1}{2\pi\lambda_1} \iint \delta_k \frac{\partial f_1}{\partial q_k} \Omega_1(\zeta_1, \bar{\zeta}_1; z_1, \bar{z}_1) \left( \frac{\partial p_1(\zeta_1)}{\partial \xi_1} \right)^{-1} d\xi_1 \wedge d\eta_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi\lambda_1} \iint \frac{\partial f_k}{\partial q_1} \Omega_1(\zeta_1, \bar{\zeta}_1; z_1, \bar{z}_1) \left( \frac{\partial p_1(\zeta_1)}{\partial \xi_1} \right)^{-1} \delta_1(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 \wedge d\eta_1. \end{aligned}$$

Поскольку  $\delta_1(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 \wedge d\eta_1 = dp_1 \wedge dq_1$ , в силу теоремы 4.2 статьи [5] следует, что последнее выражение справа равно  $f_k(z)$ . Таким образом, функция  $w(z)$  (4.3) имеет компактный носитель, принадлежит классу  $\mathbb{C}_q(\mathbb{C}^n, A)$  и удовлетворяет всем уравнениям системы (4.1). Единственность решения устанавливается так же, как в [6, с. 351]. Теорема доказана.

Применяя теорему 4.1, используя результаты [5] и дословно повторяя метод доказательства теоремы Хартокса [6, с. 351; 8, с. 52], получаем, что справедлива

**Теорема 4.2.** Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Тогда любую функцию  $g \in \mathbb{C}_q(G \setminus K)$ , моногенную по функциям  $p_j \in \mathbb{C}^1(\bar{G}_j; A)$  в  $G \setminus K$ , можно продолжить до функции, принадлежащей классу  $\mathbb{C}_q(G, A)$  и моногенной по функциям  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) в  $G$ .

*Библиографический список*

1. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М. : Мир, 1969. 136 с.
2. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. М. : Физматгиз, 1959. 628 с.
3. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М. : Мир, 1986. 216 с.
4. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М. : Мир, 1969. 396 с.
5. Кусковский Л. Н. Обобщенные ареолярные производные и их приложения к дифференциальным уравнениям // Rev. Roum. de Math. Pures et Appl. 1986. Т. 31, № 7. Р. 625–637.
6. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из  $\mathbb{C}^n$ . М. : Мир, 1984. 456 с.
7. Фёдоров В. С. Об одном виде гиперкомплексных моногенных функций // Математический сборник. 1960. Т. 50 (92), [вып.] 1. С. 101–108.
8. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М. : Мир, 1968. 280 с.
9. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. 2-е изд. М. : Наука, 1976. Ч. 2 : Функции нескольких переменных. 400 с.
10. Эрве М. Функции многих комплексных переменных. М. : Мир, 1965. 166 с.
11. Янушаускас А. И. Аналитические и гармонические функции многих переменных. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1981. 182 с.

УДК 51.72

*Е. К. Логинов, Д. Е. Логинов, А. С. Шерудилло***О ВЫБОРЕ ПЕРЕНОРМИРОВКИ МАССЫ ХИГГСА  
В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ**

Исследуется эффективный потенциал Хиггса стандартной модели в 1- и 2-петлевом приближении. Находятся численные значения бегущей константы самодействия и перенормированной массы скаляра Хиггса в достаточно широком диапазоне значений. Находятся и обсуждаются условия, оптимизирующие данную процедуру перенормировки.

**Ключевые слова:** бозон Хиггса, перенормировка массы.

We investigate the effective Higgs potential of the standard model in one- and two-loops approximation. We find the numerical values for the Higgs quartic coupling and the Higgs mass renormalized at the different pole masses. We discuss the renormalization procedure and the boundary conditions leading to the particularly interesting features of the standard model parameters.

**Key words:** Higgs boson, the mass renormalisation.

Формализм эффективного потенциала [1, 5] хорошо известен. В древесном приближении эффективный потенциал Хиггса стандартной модели имеет вид

$$V_0(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (1)$$



где  $\lambda$  и  $\mu^2$  — константы самодействия скалярного поля. В общем случае эффективный потенциал может быть представлен в виде суммы

$$V_{eff}(\phi) = V_0(\phi) + V_1(\phi) + V_2(\phi) + \dots, \quad (2)$$

где слагаемые после  $V_0(\phi)$  возникают вследствие радиационных поправок. В частности, масса бозона Хиггса определяется формулой

$$M_H^2 = \left. \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=v}, \quad (3)$$

где  $v$  — вакуумное среднее. При этом предполагается, что производная

$$\left. \frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi} \right|_{\phi=v} = 0. \quad (4)$$

Из вышеприведенных формул следует, что массовый член потенциала Хиггса может быть записан как

$$M_H^2 = M_{H_0}^2 + \delta_1 M_H^2 + \delta_2 M_H^2 + \dots, \quad (5)$$

где  $M_{H_0}^2 = 2\lambda v^2$ , а добавки  $\delta_1 M_H^2$  и  $\delta_2 M_H^2$  появляются в результате 1- и 2-петлевой коррекции массы бозона Хиггса.

Перейдем к рассмотрению эффективного потенциала Хиггса в 1-петлевом приближении [4, 9]. Он может быть представлен в виде суммы

$$V(\phi) = V_0(\phi) + V_1(\phi) \quad (6)$$

с 1-петлевой поправкой

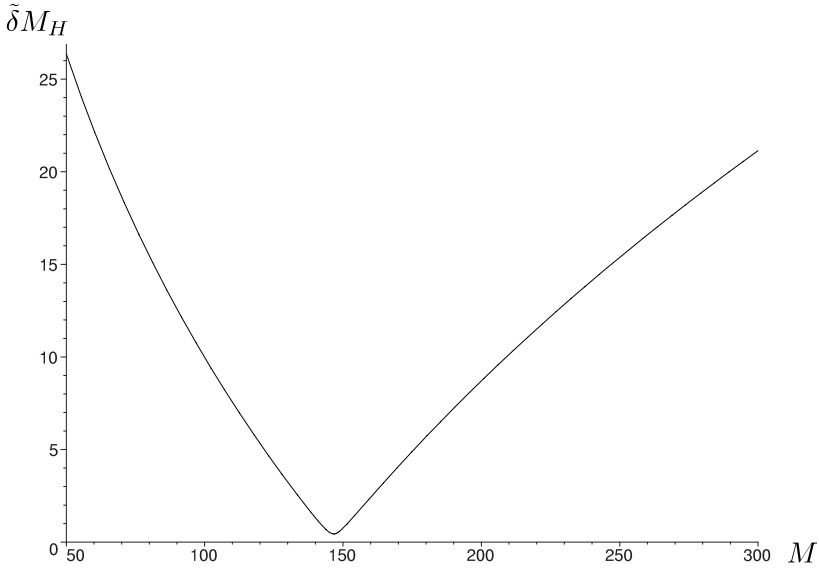
$$\begin{aligned} V_1(\phi) = & \frac{1}{64\pi^2} [-12m_t^4(\ln L_t - 3/2) + \\ & + 6m_w^4(\ln L_w - 5/6) + 3m_z^4(\ln L_z - 5/6) + \\ & + m_h^4(\ln L_h - 3/2) + 3m_g^4(\ln L_g - 3/2)], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $m_t^2 = g_t^2 \phi^2 / 2$  — квадрат массы топ-кварка,  $m_w^2 = g^2 \phi^2 / 4$  и  $m_z^2 = (g^2 + g_1^2) \phi^2 / 4$  — квадраты масс векторных бозонов,  $m_h^2 = -\mu^2 + 3\lambda \phi^2$  и  $m_g^2 = -\mu^2 + \lambda \phi^2$  — квадраты масс скаляра Хиггса и голдстоуновских бозонов, а  $L_x = \ln(m_x^2 / M^2)$ . (Здесь  $g$  и  $g'$  — калибровочные константы связи, а  $g_t$  — константа юкавского взаимодействия топ-кварка.)

Используя условие (4) и полагая  $M_H = M_H^{exp}$ , мы можем исключить  $\mu^2$  и представить  $\lambda$  как функцию от массового параметра  $M$ . Экспериментальное значение массы Хиггса  $M_H^{exp}$  известно [7, 8]. Полагая  $M_H \approx 125.66$  ГэВ и игнорируя вклады скаляров, найдем

$$\begin{aligned} M_H^2 = & 2\lambda v^2 + \frac{v^2}{128\pi^2} [2g^4(3L_w^v + 2) + \\ & + (g^2 + g_1^2)^2(3L_z^v + 2) - 48g_t^4 L_t^v], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $L_x^v = L_x$  при  $\phi = v$ . Вместо 1-петлевой коррекции  $\delta_1 M_H^2$  удобнее использовать ее линейно аппроксимированное значение  $\tilde{\delta}_1 M_H = M_H - M_{H_0}$ . Пусть  $\tilde{\delta}_1^v M_H$  и  $\tilde{\delta}_1^f M_H$  обозначают линейно аппроксимированные вклады векторных бозонов и топ-кварка соответственно. Тогда  $\tilde{\delta}_1 M_H \approx \tilde{\delta}_1^v M_H + \tilde{\delta}_1^f M_H$ . Положим  $\tilde{\delta} M_H = [(\tilde{\delta}_1^v M_H)^2 + (\tilde{\delta}_1^f M_H)^2]^{\frac{1}{2}}$  и построим график этой функции (см. рис.).



Абсолютное значение вклада векторных бозонов  
и топ-кварка в массу бозона Хиггса

Очевидно, что абсолютное значение вклада векторных бозонов и топ-кварка в коррекцию массы бозона Хиггса быстро возрастает при удалении от некоторого минимального значения. Тем самым возрастают теоретические погрешности при вычислении бегущих констант связи и массы Хиггса (см., напр.: [6]). Таким образом, лучшим выбором перенормировки для  $M_H$  будет выбор значения массового параметра  $M = M_{min} \approx 146.64$  ГэВ. Соответственно значение 1-петлевой поправки к массе Хиггса в этой точке будет равно  $\tilde{\delta}M_H \approx 0.46$  ГэВ.

Включение 2-петлевой поправки к массе бозона Хиггса (вклад КХД [2] и вклад юкавского взаимодействия [3])

$$\delta_2 M_{h(lead)}^2 = \frac{y_t^2 v^2}{(4\pi)^4} \left[ 16g_s^2 y_t^2 (3L_t^2 + L_t) - 3y_t^4 \left( 9L_t^2 - 3L_t + 2 + \frac{\pi^2}{3} \right) \right] \quad (9)$$

не меняет картины. В этом случае значение  $M_{min}$  практически не меняется (уменьшается примерно на 0.01 ГэВ). Ситуация мало меняется и тогда, когда принимается в расчет 1-петлевой вклад бозона Хиггса [3]

$$\begin{aligned} \delta_1 M_h^2 = & \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ 3y_t^2 (4m_t^2 - M_h^2) B_0(m_t, m_t, M_h) + \right. \\ & + 6\lambda^2 v^2 (3L_h - 6 + \pi\sqrt{3}) - \\ & - \frac{v^2}{4} (3g^4 - 8\lambda g^2 + 16\lambda^2) B_0(m_w, m_w, M_h) - \\ & - \frac{v^2}{8} (3G^4 - 8\lambda G^2 + 16\lambda^2) B_0(m_z, m_z, M_h) + \\ & \left. + 2m_w^2 [g^2 - 2\lambda(L_w - 1)] + m_z^2 [G^2 - 2\lambda(L_z - 1)] \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $G^2 = g^2 + g'^2$  и

$$B_0(m_a, m_b, m_c) \equiv - \int_0^1 \ln \frac{(1-x)m_a^2 + xm_b^2 - x(1-x)m_c^2 - i\epsilon}{M^2} dx. \quad (11)$$

В этом случае значение  $M_{min}$  не меняется, а значение массы Хиггса в данной точке несколько возрастает:  $\tilde{\delta}M_H \approx 3.22$  ГэВ. Напротив, картина существенно меняется при учете вклада голдстоуновских бозонов. Это связано с тем, что вклад голдстоуновских бозонов может быть мнимым (что приводит к физической нестабильности и, как следствие, к дополнительным теоретическим погрешностям). Несмотря на то что мнимая часть такого вклада сравнительно мала, ее нельзя игнорировать. Однако ее можно исключить выбором перенормировки. Прямым вычислением можно показать, что на рассматриваемом интервале значений массы Хиггса существует точка  $M_{max}$  такая, что поправка к массе Хиггса будет вещественной для  $M \leq M_{max}$  и мнимой для  $M > M_{max}$ . Соответствующие 1-петлевые линейно аппроксимированные вклады в массу бозона Хиггса в точке  $M_{max}$  перечислены в таблице:

$M_{max}$	$\delta m_v$	$\delta m_s$	$\delta m_f$	$\delta M_H$	$M_H$
108.39	0.07	1.81	7.82	9.81	125.66

Поскольку теоретическая погрешность возрастает слева от  $M_{max}$  (см. рис.), лучшим выбором перенормировки массы бозона Хиггса  $M_H$  (при учете вклада голдстоуновских бозонов) будет выбор значения массового параметра  $M = M_{max}$ .

#### Библиографический список

1. Coleman S., Weinberg E. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking // Phys. Rev. D. 1973. Vol. 7. P. 1888–1910.
2. Higgs boson mass and new physics / F. Bezrukov et al. // JHEP. 2012. Vol. 10, № 140. P. 1–34.
3. Higgs mass and vacuum stability in the standard model at NNLO / G. Degross et al. // JHEP. 2012. Vol. 1208, № 098. P. 1–35.
4. Improving the effective potential / M. Bando et al. // Phys. Lett. B. 1993. Vol. 301. P. 83–89.
5. Jackiw R. Functional evaluation of the effective potential // Phys. Rev. D. 1974. Vol. 9. P. 1686–1701.
6. Masina I. Higgs boson and top-quark masses as tests of electroweak vacuum stability // Phys. Rev. D. 2013. Vol. 87, № 053001. P. 1–13.
7. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC / CMS Collaboration // Phys. Lett. B. 2012. Vol. 716. P. 30–61.
8. Observation of a new particle in the search for the standard model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC / ATLAS Collaboration // Phys. Lett. B. 2012. Vol. 716. P. 1–29.
9. The effective potential and the renormalisation group / C. Ford et al. // Nucl. Phys. B. 1993. Vol. 395. P. 17–34.

УДК 512.543

Д. И. Молдаванский, К. С. Пелевина

## О ФИНИТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Доказано, что в обобщенном свободном произведении двух групп все конечно порожденные подгруппы финитно отделимы, если этим свойством обладают свободные множители, а объединенная подгруппа удовлетворяет условию максимальности и содержит подгруппу конечного индекса, нормальную в каждом свободном сомножителе.

**Ключевые слова:** финитно аппроксимируемая группа, финитно отделимая подгруппа, обобщенное свободное произведение групп.

It is proved that all finitely generated subgroups of generalized free product of two groups are finitely separable provided that free factors have this property and amalgamated subgroup satisfies the maximum condition for subgroups and contains a finite index subgroup that is normal in each free factor.

**Key words:** finitely residual group, finitely separable subgroup, generalized free product of groups.

Напомним, что группа  $G$  называется финитно аппроксимируемой (или, короче,  $\mathcal{F}$ -аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента  $g \in G$  существует гомоморфизм группы  $G$  на некоторую конечную группу, образ элемента  $g$  относительно которого отличен от 1. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется финитно отделимой ( $\mathcal{F}$ -отделимой), если для любого элемента  $g \in G$ , не принадлежащего подгруппе  $H$ , существует гомоморфизм  $\varphi$  группы  $G$  на конечную группу такой, что образ  $g\varphi$  элемента  $g$  не принадлежит образу  $H\varphi$  подгруппы  $H$ . Таким образом, группа  $G$  является  $\mathcal{F}$ -аппроксимируемой тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа  $\mathcal{F}$ -отделима. Более общо, легко видеть, что нормальная подгруппа  $H$  группы  $G$  является  $\mathcal{F}$ -отделимой тогда и только тогда, когда фактор-группа  $G/H$   $\mathcal{F}$ -аппроксимируема. Из этого замечания и существования 2-порожденных групп, не являющихся  $\mathcal{F}$ -аппроксимируемыми (см., напр.: [5]), следует, что каждая нециклическая свободная группа содержит подгруппу, не являющуюся  $\mathcal{F}$ -отделимой. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что задача нахождения условий наследования обобщенным свободным произведением групп свойства  $\mathcal{F}$ -отделимости *всех* подгрупп фактически сводится к вопросу отсутствия в нем нециклических свободных подгрупп.

Действительно, легко видеть, что свободное произведение

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

групп  $A$  и  $B$  с подгруппами  $H \leq A$  и  $K \leq B$ , объединенными в соответствии с изоморфизмом  $\varphi: H \rightarrow K$ , в случае, когда  $H \neq A$  и  $K \neq B$ , не содержит нециклических свободных подгрупп в точности тогда, когда нециклические свободные подгруппы отсутствуют в группах  $A$  и  $B$  и индексы подгрупп  $H$  и  $K$  соответственно в группах  $A$  и  $B$  равны 2. Отсю-

да, в свою очередь, непосредственно следует (снова при условии  $H \neq A$  и  $K \neq B$ ), что все подгруппы группы  $G$   $\mathcal{F}$ -отделимы тогда и только тогда, когда в группах  $A$  и  $B$  все подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы и  $[A : H] = [B : K] = 2$ .

С другой стороны, из теоремы М. Холла [6] вытекает, что произвольная конечно порожденная подгруппа любой свободной группы является  $\mathcal{F}$ -отделимой. Обобщая этот результат, Н. С. Романовский [2] доказал, что (обычное) свободное произведение произвольного семейства групп, все конечно порожденные подгруппы каждой из которых  $\mathcal{F}$ -отделимы, также является группой, все конечно порожденные подгруппы которой  $\mathcal{F}$ -отделимы. Оказалось, тем не менее, что для конструкции обобщенного свободного произведения групп аналогичное утверждение может, вообще говоря, оказаться неверным.

Началом систематического изучения свойства  $\mathcal{F}$ -отделимости всех конечно порожденных подгрупп обобщенного свободного произведения групп следует, по-видимому, считать [4]. В этой работе Р. Алленби и Р. Греггорас привели первый (и наиболее простой) пример содержащего неотделимую конечно порожденную подгруппу обобщенного свободного произведения двух групп, у которых все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы. Пример группы, содержащей неотделимую конечно порожденную подгруппу и являющейся обобщенным свободным произведением двух групп, все конечно порожденные подгруппы каждой из которых  $\mathcal{F}$ -отделимы, с циклическими объединяемыми подгруппами, был построен Е. Рипсом [7]. Позднее в [3] был приведен более простой аналогичный пример обобщенного свободного произведения с циклическим объединением двух конечно порожденных нильпотентных групп.

Из результатов противоположного характера, гарантирующих  $\mathcal{F}$ -отделимость всех конечно порожденных подгрупп обобщенного свободного произведения  $G = (A * B; H = K, \varphi)$ , отметим прежде всего, что это утверждение справедливо (и почти очевидно) в случае, когда группы  $A$  и  $B$  конечны. В [4] было доказано, что в группе  $G$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы, если в группах  $A$  и  $B$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы, а подгруппы  $H$  и  $K$  конечны или если группы  $A$  и  $B$  являются почти полициклическими и подгруппа  $H$  содержит такую подгруппу  $U$  конечного индекса, что  $U$  и  $U\varphi$  являются нормальными подгруппами групп  $A$  и  $B$  соответственно.

В [1] была доказана

**Теорема 1.** Пусть  $G = (A * B; H = K, \varphi)$  — свободное произведение групп  $A$  и  $B$  с подгруппами  $H \leq A$  и  $K \leq B$ , объединенными в соответствии с изоморфизмом  $\varphi: H \rightarrow K$ . Пусть  $H$  является нормальной подгруппой группы  $A$ ,  $K$  является нормальной подгруппой группы  $B$  и группы  $H$  и  $K$  удовлетворяют условию максимальности для подгрупп. Если в группах  $A$  и  $B$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы, то и в группе  $G$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы.

Целью данной статьи является доказательство следующего обобщения теоремы 1, а также приведенного выше результата из [4] о свободном произведении почти полициклических групп:

**Теорема 2.** Пусть  $G = (A * B; H = K, \varphi)$  — свободное произведение групп  $A$  и  $B$  с подгруппами  $H \leq A$  и  $K \leq B$ , объединенными в соот-

ветствии с изоморфизмом  $\varphi: H \rightarrow K$ . Пусть  $H$  и  $K$  являются группами с условием максимальности для подгрупп. Если в группах  $A$  и  $B$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы, а подгруппа  $H$  содержит такую подгруппу  $U$  конечного индекса, что  $U$  и  $U\varphi$  являются нормальными подгруппами групп  $A$  и  $B$  соответственно, то в группе  $G$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующее простое замечание из [1]:

**Лемма 1.** Пусть  $N$  — нормальная подгруппа некоторой группы  $L$ . Если  $N$  является конечно порожденной группой и в группе  $L$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы, то и в фактор-группе  $L/N$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы.

Легко видеть, что поскольку подгруппы  $U$  и  $V = U\varphi$  лежат в подгруппах  $A$  и  $B$  соответственно и нормальны в них, то подгруппа  $U = U\varphi$  группы  $G = (A * B; H = K, \varphi)$  нормальна и фактор-группа  $G/U$  изоморфна свободному произведению

$$\bar{G} = (\bar{A} * \bar{B}; \bar{H} = \bar{K}, \bar{\varphi})$$

групп  $\bar{A} = A/U$  и  $\bar{B} = B/V$  с подгруппами  $\bar{H} = H/U$  и  $\bar{K} = K/V$ , объединенными в соответствии с изоморфизмом  $\bar{\varphi}: \bar{H} \rightarrow \bar{K}$ , индуцированным отображением  $\varphi$ . Так как в силу условия теоремы группы  $U$  и  $V$  являются конечно порожденными, из леммы 1 следует, что в группах  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы. Далее, поскольку в свободном произведении  $\bar{G}$  объединяемые подгруппы  $\bar{H}$  и  $\bar{K}$  конечны, из леммы 1 и приведенного выше результата из [4] вытекает

**Лемма 2.** В фактор-группе  $G/U$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы.

Пусть  $P$  — произвольная конечно порожденная подгруппа группы  $G$ . Для доказательства  $\mathcal{F}$ -отделимости этой подгруппы достаточно для любого элемента  $a \in G$ , не принадлежащего подгруппе  $P$ , построить такой гомоморфизм  $\theta$  группы  $G$  на некоторую группу с  $\mathcal{F}$ -отделимыми конечно порожденными подгруппами, что  $a\theta \notin P\theta$ . Если элемент  $a$  не принадлежит подгруппе  $PU$ , то в силу леммы 2 искомым является, как легко видеть, естественный гомоморфизм группы  $G$  на фактор-группу  $G/U$ .

Будем далее считать, что элемент  $a$  входит в подгруппу  $PU$ , так что  $a = pu$  для подходящих элементов  $p \in P$  и  $u \in U$ . Так как  $a \notin P$ , элемент  $u$  не входит в подгруппу  $W = P \cap U$ . Поскольку группа  $H$  удовлетворяет условию максимальности, ее подгруппа  $W$  является конечно порожденной и потому  $\mathcal{F}$ -отделима в группе  $A$ . Следовательно, существует нормальная подгруппа  $R$  конечного индекса группы  $A$  такая, что  $u \notin WR$ . Полагаем  $T = U \cap R$ . Тогда  $T$  — нормальная подгруппа конечного индекса в группе  $U$  и  $u \notin WT$ . Покажем, что  $a \notin PT$ .

Действительно, в противном случае для некоторых элементов  $p_1 \in P$  и  $t \in T$  должно выполняться равенство  $a = p_1t$ . Следовательно,  $pu = p_1t$ , и потому элемент  $p_1^{-1}p = tu^{-1}$  принадлежит подгруппе  $W$ . Отсюда  $u = (p_1^{-1}p)^{-1}t$  входит в  $WT$ , что невозможно.

Поскольку группа  $U$  является конечно порожденной, подгруппу  $T$  без потери общности можно считать характеристической в  $U$  и потому — нормальной подгруппой группы  $A$ . Тогда  $S = T\varphi$  — характеристическая подгруппа группы  $V$  и нормальная подгруппа группы  $B$ . Таким образом, подгруппа  $T$  удовлетворяет условиям теоремы 2, и аналогично лемме 2 можно утверждать, что в фактор-группе  $G/T$  все конечно порожденные подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы. Поскольку элемент  $a$  не входит в подгруппу  $PT$ , то искомым является естественный гомоморфизм группы  $G$  на фактор-группу  $G/T$ . Теорема 2 доказана.

#### Библиографический список

1. Молдаванский Д. И., Ускова А. А. О финитной отделимости подгрупп обобщенных свободных произведений групп // Чебышевский сборник. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3 (47). С. 92–98.
2. Романовский Н. С. О финитной аппроксимируемости свободных произведений относительно вхождения // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1969. Т. 33, № 6. С. 1324–1329.
3. Allenby R., Doniz D. A free product of finitely generated nilpotent groups amalgamating a cycle that is not subgroup separable // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124, № 4. P. 1003–1005.
4. Allenby R., Gregorac R. On locally extended residually finite groups // Lecture Notes Math. 1973. Vol. 319. P. 9–17.
5. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199–201.
6. Hall M. Coset representations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 67. P. 421–432.
7. Rips E. An example of a non-LERF group which is a free product of LERF groups with an amalgamated cyclic subgroup // Israel J. Math. 1990. Vol. 70, № 1. P. 104–110.

УДК 512.543

Е. В. Соколов

## О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА Д. И. МОЛДАВАНСКОГО К ИССЛЕДОВАНИЮ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ HNN-РАСШИРЕНИЙ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП

Статья представляет собой расширенную версию доклада, прочитанного автором на Международной научной конференции, посвященной 75-летию профессора Д. И. Молдаванского (Иваново, 2015). Приводятся общие сведения о корневых классах и аппроксимируемости ими свободных конструкций групп, краткий обзор известных результатов об аппроксимируемости (относительно отношения равенства элементов) не являющихся нисходящими HNN-расширений и описание некоторых новых результатов об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений с центральными связанными подгруппами, в том числе полученных с использованием метода спуска и подъема совместимых подгрупп Д. И. Молдаванского.

**Ключевые слова:** аппроксимационные свойства, HNN-расширение, корневой класс групп.

© Соколов Е. В., 2016

This is an expanded version of a paper read by the author at the International scientific conference dedicated to the 75th anniversary of Professor D. I. Moldavanskii (Ivanovo, 2015). The article provides an overview of the root classes and the approximability by them of free constructions of groups, a brief survey of the known results on the approximability (relatively to the relationship of elements equality) of non-ascending HNN-extensions, and a description of some new results on the approximability by root classes of HNN-extensions with central associated subgroups including those obtained using D. I. Moldavanskii's method of the descent and the ascent of compatible subgroups.

**Key words:** residual properties, HNN-extension, root class of groups.

## 1. Корневые классы групп

Понятие аппроксимируемости группы в самом общем виде может быть сформулировано следующим образом (см., напр.: [14, § 4.4]). Пусть  $\mathcal{C}$  — некоторый класс групп,  $X$  — группа и  $\rho$  — отношение между элементами и (или) множествами элементов группы  $X$ , определенное как на самой группе  $X$ , так и на всех ее гомоморфных образах. Говорят, что группа  $X$  *аппроксимируема классом групп  $\mathcal{C}$*  (или, короче,  *$\mathcal{C}$ -аппроксимируема*) относительно отношения  $\rho$ , если для любых элементов и (или) множеств элементов группы  $X$ , не состоящих в отношении  $\rho$ , существует гомоморфизм этой группы на некоторую группу из класса  $\mathcal{C}$ , при котором образы указанных элементов и множеств по-прежнему не состоят в отношении  $\rho$ . Чаще всего рассматривают аппроксимируемость относительно отношения равенства элементов и упоминание об отношении при этом опускают. Получено также значительное число результатов об аппроксимируемости относительно отношений сопряженности элементов и вхождения элемента в подмножество. Если группа  $X$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема относительно принадлежности подмножеству  $S$  ее элементов, то говорят, что данное подмножество *отделимо в группе  $X$  классом групп  $\mathcal{C}$*  или же просто  *$\mathcal{C}$ -отделимо в  $X$* .

В течение достаточно длительного времени понятие аппроксимируемости изучалось только применительно к какому-нибудь конкретному классу групп. Чаще всего в качестве такового выступал класс всех конечных групп, аппроксимируемость которым принято называть *финитной*. Со временем, однако, появились работы, в которых на аппроксимирующий класс накладывался лишь определенный набор условий.

Примером указанного набора является понятие корневого класса групп, введенное К. Грюнбергом [46] в 1957 г. Согласно его определению класс групп  $\mathcal{C}$  называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений, а также обладает следующим свойством, которое теперь обычно называют условием Грюнберга.

**Условие Грюнберга.** *Для любой группы  $X$  и для любой субнормальной последовательности  $Z \leq Y \leq X$  с факторами из класса  $\mathcal{C}$  найдется нормальная подгруппа  $T$  группы  $X$ , лежащая в  $Z$  и такая, что  $X/T \in \mathcal{C}$ .*

Ответ на вопрос «Откуда взялось именно такое условие?» звучит очень просто: «Чтобы было легче доказывать». В [46] изучается аппроксимируемость конечными группами и конечными  $p$ -группами. Нетрудно заметить, что при этом возникает ряд близких по формулировке утвер-



ждений, которые доказываются с помощью похожих рассуждений. Именно те свойства, которые позволяют провести аналогичные доказательства для произвольного корневого класса групп, и вынесены в приведенное выше определение.

Таким образом, практическая польза условия Грюнберга понятна, однако оно не позволяет легко разграничить корневые и некорневые классы групп. Известны равносильные определения корневого класса, решающие эту задачу; они будут приведены чуть позже, чтобы не нарушать хронологию событий.

Вторым своим рождением понятие корневого класса обязано Д. Н. Азарову, который заметил, что любая свободная группа аппроксимируется любым нетривиальным корневым классом групп (здесь и далее под нетривиальным будем понимать корневой класс групп, содержащий хотя бы одну неединичную группу). Это утверждение, опубликованное в [8], открыло дорогу к изучению аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп, и за прошедшие с тех пор 14 лет в данном направлении было получено достаточно много результатов. В частности, непосредственно из замечания Д. Н. Азарова и теоремы 4.1 статьи [46] следует, что свободное произведение произвольного семейства групп, аппроксимируемых некоторым корневым классом, в свою очередь аппроксимируется этим классом [8, теорема 2]. Аппроксимируемость корневыми классами (относительно равенства) обобщенных свободных произведений и HNN-расширений изучалась в работах [7, 8, 29, 31, 32, 34, 35, 39, 55, 57] и [11, 35, 37, 56, 57] соответственно (см. также обзорную статью [10]). Доказаны и первые утверждения об аппроксимируемости корневыми классами относительно сопряженности [28], об отделимости корневыми классами циклических подгрупп [26], о почти аппроксимируемости корневыми классами [4, 9] (группа называется *почти аппроксимируемой классом  $C$  относительно отношения  $\rho$* , если она содержит подгруппу конечного индекса, аппроксимируемую этим классом относительно  $\rho$ ).

Перейдем теперь к рассмотрению упомянутых ранее равносильных определений корневого класса. Прежде всего заметим, что свойство замкнутости относительно взятия прямых произведений следует из условия Грюнберга, поэтому из определения его можно исключить. Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.1** [55]. *Пусть класс групп  $C$  замкнут относительно взятия подгрупп. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Класс  $C$  удовлетворяет условию Грюнберга (и, следовательно, является корневым).*
2. *Класс  $C$  замкнут относительно взятия декартовых сплетений.*
3. *Класс  $C$  замкнут относительно взятия расширений и для любых двух групп  $X, Y \in C$  содержит декартово произведение  $\prod_{y \in Y} X_y$ , где  $X_y$  — изоморфная копия группы  $X$  для каждого  $y \in Y$ .*

Частным случаем приведенной теоремы является полученное ранее в [12] описание корневых классов групп, состоящих только из конечных групп: это — в точности классы, замкнутые относительно взятия подгрупп и расширений. Кроме того, из теоремы 1.1 легко следует, что пересечение корневых классов снова оказывается корневым классом [55, следствие 2].

Таким образом, корневыми являются, например, классы всех конечных групп, периодических  $\pi$ -групп (т. е. периодических групп, все простые делители порядков элементов которых принадлежат фиксированному непустому множеству простых чисел  $\pi$ ), разрешимых групп, всех групп без кручения и всевозможные их пересечения. Что же касается нильпотентных групп, аппроксимируемость которыми тоже часто рассматривается, они составляют незамкнутый относительно расширений и, следовательно, некорневой класс групп.

Почему имеет смысл изучать аппроксимируемость корневыми классами? Во-первых, это — возможность получить больше результатов почти теми же усилиями, что и при исследовании аппроксимируемости каким-нибудь одним конкретным классом групп (ср., напр.: [3] и [4], [5] и [9], [33] и [37], [36] и [39], [44] и [28]). Во-вторых, при доказательстве аппроксимируемости конкретным классом групп естественно возникает желание использовать специфические свойства групп этого класса. Например, для конечных  $p$ -групп это — нильпотентность, наличие главного ряда с циклическими факторами, некоторые теоретико-числовые соотношения и т. д. В результате полученное рассуждение часто оказывается узкоспециальным и неприменимым где-либо еще. Доказательство же аппроксимируемости произвольным корневым классом групп вынуждает пользоваться лишь ограниченным набором свойств данного класса, и это делает аргументацию более пригодной для последующих обобщений и усилений, да и просто более понятной (ср., напр.: [30] и [11]).

## 2. HNN-расширения и изучение их аппроксимируемости

Обратимся теперь к рассмотрению конструкции HNN-расширения групп. Все введенные в данном параграфе обозначения предполагаются фиксированными до конца изложения.

Хорошо известно, что если в некоторой группе  $G$  заданы две изоморфные подгруппы  $H$ ,  $K$  и изоморфизм  $\varphi$  между ними, то определено *HNN-расширение*  $G^*$  группы  $G$ . Это — группа, образующими которой являются все образующие группы  $G$  и буква  $t$ , а определяющими соотношениями — определяющие соотношения группы  $G$  и все соотношения вида  $t^{-1}ht = h\varphi$ , где  $h$  и  $h\varphi$  — слова от порождающих группы  $G$ , задающие элемент из подгруппы  $H$  и его образ относительно изоморфизма  $\varphi$ . Из теоремы о нормальной форме элемента HNN-расширения (см., напр.: [16, гл. IV, теорема 2.1]) следует, что тождественное отображение порождающих группы  $G$  в группу  $G^*$  определяет инъективный гомоморфизм и потому группу  $G$  можно считать подгруппой HNN-расширения  $G^*$ . Представление группы  $G^*$  принято для краткости записывать в виде

$$\langle G, t; t^{-1}ht = h\varphi, h \in H \rangle \quad \text{или} \quad \langle G, t; t^{-1}Ht = K, \varphi \rangle.$$

Легко видеть, что если в качестве обеих связанных подгрупп  $H$  и  $K$  взять группу  $G$ , то HNN-расширение  $G^*$  превратится в обычное расщепляемое расширение группы  $G$  при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом  $t$ . Если же с группой  $G$  совпадает только одна из подгрупп  $H$  и  $K$ , то HNN-расширение называется *нисходящим* (*descending*) или, в зарубежной терминологии, *восходящим* (*ascending*). Надо заметить, что, хотя нисходящее HNN-расширение формально представля-

ет собой частный случай общего определения, этого нередко нельзя сказать о получающихся для него результатах. Поэтому такое HNN-расширение вполне можно рассматривать как самостоятельную конструкцию. Здесь же речь будет идти только об HNN-расширениях, не являющихся нисходящими.

Стоит отметить, что определенную роль в возникновении понятия HNN-расширения сыграла статья Д. И. Молдавского [18], в которой было доказано, что если в группе с одним определяющим соотношением некоторый порождающий входит в данное соотношение с нулевой суммой показателей степеней, то эта группа оказывается (в современной терминологии) HNN-расширением некоторой другой группы, также имеющей одно определяющее соотношение.

Как обычно, подгруппу  $N$  группы  $G$  будем называть  $(H, K, \varphi)$ -совместимой, если

$$(N \cap H)\varphi = N \cap K.$$

Легко видеть, что если  $\sigma$  — некоторый гомоморфизм HNN-расширения  $G^*$ , то пересечение его ядра с группой  $G$  является нормальной  $(H, K, \varphi)$ -совместимой подгруппой данной группы. Если при этом образ  $G^*$  относительно  $\sigma$  принадлежит некоторому классу групп  $\mathcal{C}$ , замкнутому относительно взятия подгрупп, то в силу соотношений

$$G/(\ker \sigma \cap G) \cong (G \cdot \ker \sigma)/\ker \sigma \leq G^*/\ker \sigma \cong G^*\sigma$$

фактор-группа  $G/(\ker \sigma \cap G)$  также содержится в  $\mathcal{C}$ .

Отсюда следует, что если HNN-расширение  $G^*$  аппроксимируется классом  $\mathcal{C}$ , то группа  $G$  должна обладать достаточно представительным семейством нормальных  $(H, K, \varphi)$ -совместимых подгрупп, фактор-группы по которым принадлежат  $\mathcal{C}$ . Более точно, для каждого неединичного элемента группы  $G$  должна существовать не содержащая его подгруппа данного семейства. Обратное утверждение в общем случае неверно, однако первым шагом в направлении доказательства  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости группы  $G^*$ , как правило, является именно умение строить совместимые подгруппы указанного вида.

Стоит отметить, что при изучении аппроксимируемости обобщенных свободных произведений возникает похожая задача, но в каждом свободном множителе нужно найти подгруппу, которая имеет заданное пересечение только с одной фиксированной подгруппой, а не сразу с двумя, как в HNN-расширениях. Понятно, что это сделать легче, поэтому и утверждений об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений значительно больше.

Рассмотрим теперь вкратце полученные зарубежными авторами результаты об аппроксимируемости HNN-расширений относительно равенства. основополагающей работой в данной области является статья [42], в которой, во-первых, доказана финитная аппроксимируемость HNN-расширения конечной группы (одновременно это было сделано также в [43]) и, во-вторых, получено общее достаточное условие финитной аппроксимируемости произвольного HNN-расширения, являющееся аналогом хорошо известной фильтрационной теоремы Г. Баумслэга [41] для обобщенных свободных произведений и формулируемое следующим образом.

**Теорема 2.1.** Если  $\Omega$  — семейство всех нормальных  $(H, K, \varphi)$ -совместимых подгрупп конечного индекса группы  $G$  и выполняются соотношения

$$\bigcap_{N \in \Omega} N = 1, \quad \bigcap_{N \in \Omega} HN = H \quad \text{и} \quad \bigcap_{N \in \Omega} KN = K,$$

то группа  $G^*$  финитно аппроксимируема.

В [54] указаны некоторые ситуации, в которых данное достаточное условие становится необходимым:

- подгруппы  $H$  и  $K$  совпадают и изоморфизм  $\varphi$ , являющийся в данном случае автоморфизмом подгруппы  $H$ , имеет конечный порядок;
- подгруппы  $H$  и  $K$  совпадают и удовлетворяют нетривиальному тождеству;
- подгруппы  $H$  и  $K$  собственным образом содержатся в подгруппе  $X \leq G$ , удовлетворяющей нетривиальному тождеству.

Тем не менее проверка фильтрационного условия для конкретной группы может оказаться весьма нетривиальной задачей, поэтому имеют смысл дальнейшие исследования, позволяющие в частных случаях получить более удобные в применении утверждения.

Значительный вклад в изучение аппроксимационных свойств HNN-расширений внесли греческие математики, в первую очередь Е. Раптис и Д. Варсос. Они получили, в частности:

- критерий финитной аппроксимируемости HNN-расширения конечно порожденной нильпотентной группы [52, теорема 5\*];
- критерий нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения  $G^*$  в случае, когда группа  $G$  конечна или является конечно порожденной абелевой [51, теоремы 4 и 11];
- критерий аппроксимируемости конечными  $p$ -группами HNN-расширения конечной группы [51, теорема 13];
- утверждение об аппроксимируемости разрешимыми группами произвольного HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы [50, теорема 1.1].

Еще один критерий аппроксимируемости конечными  $p$ -группами HNN-расширения конечной группы доказан в [40].

В остальных работах зарубежных авторов изучалась, в основном, финитная аппроксимируемость HNN-расширений с бесконечными циклическими связанными подгруппами. Почти во всех из них применяется понятие регулярности группы по подмножеству ее элементов, введенное в [49] следующим образом.

Пусть  $X$  — некоторая группа и  $S$  — подмножество ее элементов, каждый из которых имеет бесконечный порядок. Говорят, что группа  $X$  *регулярна по подмножеству  $S$* , если существует целое положительное число  $r$  такое, что для любого целого положительного числа  $s$  найдется гомоморфизм группы  $X$  на конечную группу, переводящий каждый элемент из  $S$  в элемент порядка  $rs$ .

Приведенное ниже утверждение служит заменой теоремы 2.1 в случае бесконечных циклических связанных подгрупп.

**Теорема 2.2** [53, теорема 1]. Пусть подгруппы  $H$  и  $K$  являются бесконечными циклическими и порождаются элементами  $h$  и  $k$  соответ-

ственно. Если группа  $G$  регулярна по подмножеству  $\{h, k\}$  и подгруппы  $H$  и  $K$  финитно отделимы в  $G$ , то HNN-расширение  $G^*$  финитно аппроксимируемо.

Из результатов работы [45] следует, что свободные, парасвободные, нильпотентные без кручения и полициклические группы регулярны по любому подмножеству вида  $\{x, x\alpha\}$ , где  $x$  — элемент бесконечного порядка и  $\alpha$  — произвольный автоморфизм группы. Отсюда вытекает

**Следствие 2.3** [53, следствие]. Пусть  $G$  — свободная, парасвободная, нильпотентная без кручения или полициклическая группа;  $H$  и  $K$  — бесконечные циклические подгруппы; изоморфизм  $\varphi$  совпадает с ограничением на подгруппу  $H$  некоторого автоморфизма группы  $G$ . Тогда HNN-расширение  $G^*$  финитно аппроксимируемо.

Еще одно условие, более слабое, чем регулярность, введено в [47]. Говорят, что группа  $X$  квазирегулярна по подмножеству  $S$  элементов бесконечного порядка, если для любого целого положительного числа  $r$  существуют целое положительное число  $s$  и гомоморфизм группы  $X$  на конечную группу, переводящий каждый элемент из  $S$  в элемент порядка  $rs$ . Имеет место

**Теорема 2.4** [47, теорема 2.9]. Пусть подгруппы  $H$  и  $K$  являются бесконечными циклическими и порождаются элементами  $h$  и  $k$  соответственно. Пусть также все циклические подгруппы группы  $G$  финитно отделимы. HNN-расширение  $G^*$  финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда группа  $G$  квазирегулярна по подмножеству  $\{h, k\}$ .

В той же статье [47] приводится ряд достаточных условий квазирегулярности конечно порожденной нильпотентной группы по подмножеству, состоящему из двух элементов бесконечного порядка. При этом вопрос о полном описании таких подмножеств указанной группы остается открытым.

По-видимому, последней на момент составления данного обзора зарубежной работой, в которой исследуется аппроксимируемость HNN-расширений, является [58]. Основной ее результат выглядит следующим образом.

**Теорема 2.5** [58, теорема 3.4]. Пусть  $H$  и  $K$  — нормальные в группе  $G$  бесконечные циклические подгруппы. Пусть также группа  $G$  не является циклической и все ее конечно порожденные подгруппы финитно отделимы. HNN-расширение  $G^*$  финитно аппроксимируемо тогда и только тогда, когда  $H \cap K = 1$  или  $H^n = K^n$  для некоторого целого положительного числа  $n$ .

### 3. Результаты об аппроксимируемости HNN-расширений, полученные Д. И. Молдаванским и его учениками

В параграфе 1 уже были перечислены работы ивановских математиков, в которых исследовалась аппроксимируемость HNN-расширений корневыми классами. Наиболее ранней среди них является статья Д. Тьедро [56], в прошлом аспиранта Д. И. Молдаванского, а в настоящее время — профессора университета Нгаоундере (Камерун), в которой предпринято первое исследование аппроксимируемости HNN-расширений про-

произвольным корневым классом групп. В ней установлено, что HNN-расширение  $G^*$  аппроксимируется корневым классом  $\mathcal{C}$ , если этим классом аппроксимируется группа  $G$  и существует гомоморфизм группы  $G^*$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , инъективный на подгруппах  $H$  и  $K$  (все рассматриваемые в настоящем параграфе корневые классы предполагаются нетривиальными). Также в данной статье доказан критерий аппроксимируемости HNN-расширения  $G^*$  произвольным корневым классом в случае, когда  $H = K$  и изоморфизм  $\varphi$  представляет собой тождественное отображение. Эти результаты являются аналогами теорем 3 и 4 из [8], в которых рассматривалась аппроксимируемость корневыми классами обобщенных свободных произведений. В [57] описанные выше утверждения распространены на случай HNN-расширения с произвольным семейством проходных букв.

В работах Е. А. Тумановой [35, 37] исследуется аппроксимируемость корневым классом  $\mathcal{C}$  HNN-расширения  $G^*$  при условии, что  $H = K$ , но изоморфизм  $\varphi$  уже необязательно является тождественным. В случае, когда  $G \in \mathcal{C}$  и подгруппа  $H$  нормальна в группе  $G$ , получено достаточное условие  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости HNN-расширения  $G^*$ , которое становится и необходимым, если класс  $\mathcal{C}$  замкнут относительно факторизации (т. е. взятия гомоморфных образов). Также установлены критерии  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости HNN-расширения  $G^*$  при условии, что класс  $\mathcal{C}$  замкнут относительно факторизации, группа  $G$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, а подгруппа  $H$  нормальна в группе  $G$  и удовлетворяет хотя бы одному из следующих ограничений:

- группа  $\text{Aut}_{G^*}(H)$  всех автоморфизмов подгруппы  $H$ , представляющих собой ограничения на эту подгруппу всевозможных внутренних автоморфизмов HNN-расширения  $G^*$ , является абелевой;
- группа  $\text{Aut}_{G^*}(H)$  конечна;
- автоморфизм  $\varphi$  совпадает с ограничением на подгруппу  $H$  некоторого внутреннего автоморфизма группы  $G$ ;
- подгруппа  $H$  конечна;
- подгруппа  $H$  является бесконечной циклической;
- подгруппа  $H$  имеет конечный ранг Гирша — Зайцева (т. е. обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого — либо периодическая, либо бесконечная циклическая группа).

Кроме того, найдено достаточное условие  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости HNN-расширения  $G^*$  в случае, когда группа  $G$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, а подгруппа  $H$  представляет собой ее ретракт (здесь класс  $\mathcal{C}$  не обязан быть замкнутым относительно факторизации).

Последней на момент написания данного обзора опубликованной работой об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений является статья Д. В. Гольцова [11]. В ней установлена аппроксимируемость HNN-расширения  $G^*$  замкнутым относительно факторизации корневым классом  $\mathcal{C}$  при условии, что подгруппы  $H$  и  $K$  лежат в центре группы  $G$  и имеют тривиальное пересечение, а также справедливо хотя бы одно из следующих утверждений:

- группа  $G$  принадлежит классу  $\mathcal{C}$ ;
- группа  $G$  аппроксимируется классом  $\mathcal{C}$ , подгруппы  $H$  и  $K$  конечны.

В [15] доказаны общие достаточные условия аппроксимируемости HNN-расширения  $G^*$  классом групп, удовлетворяющим несколько более слабым ограничениям, чем корневой класс. Указанные ограничения вы-

полняются, например, для класса полисвободных групп (т. е. групп, обладающих конечным субнормальным рядом со свободными факторами), который, как установлено в [13], не является корневым.

В недавних работах [1] и [25] получен ряд утверждений об аппроксимируемости HNN-расширений тем или иным конкретным классом групп. Д. Н. Азаровым [1] (см. также: [2]) найден критерий финитной аппроксимируемости HNN-расширения  $G^*$  при условии, что подгруппы  $H$  и  $K$  имеют в группе  $G$  конечные индексы, а сама эта группа удовлетворяет нетривиальному тождеству и обладает конечным общим рангом (последнее означает существование целого положительного числа  $r$  такого, что любое конечное подмножество элементов группы  $G$  содержится в некоторой ее  $r$ -порожденной подгруппе). В [25] доказано следующее необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширений: если группа  $G$  нильпотентна и  $H \cup K \neq G$ , то из аппроксимируемости HNN-расширения  $G^*$  нильпотентными группами следует, что для некоторого простого числа  $p$  подгруппы  $H$  и  $K$   $p'$ -изолированы в группе  $G$ . Это утверждение является частичным аналогом основного результата работы [6] о нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений. В связи с его формулировкой следует напомнить, что подгруппа  $Y$  группы  $X$  называется  $\pi'$ -изолированной в этой группе для некоторого множества простых чисел  $\pi$ , если для любого элемента  $x \in X$  и для любого простого числа  $q \in \pi'$  из включения  $x^q \in Y$  следует, что  $x \in Y$ . Здесь, как обычно,  $\pi'$  обозначает дополнение множества  $\pi$  во множестве всех простых чисел, что же касается символа  $p'$ , использованного выше, — он употребляется для краткости вместо  $\{p\}'$ .

Значительное число результатов об аппроксимируемости различными конкретными классами групп получено также для групп Баумслэга — Солитэра, представляющих собой всевозможные (в том числе нисходящие) HNN-расширения бесконечной циклической группы; см. по этому поводу обзорные статьи [24, 48]. Критерий аппроксимируемости групп Баумслэга — Солитэра произвольным замкнутым относительно факторизации корневым классом групп анонсирован в [38].

Остановимся теперь более подробно на описании результатов, полученных непосредственно Д. И. Молдаванским. В [19] им были доказаны критерии аппроксимируемости конечными  $p$ -группами HNN-расширения конечной группы, отличный от упоминавшегося ранее критерия Е. Раптиса и Д. Варсоса, и достаточное условие аппроксимируемости конечными  $p$ -группами произвольного HNN-расширения, аналогичное теореме 2.1. С помощью второго результата были получены критерии аппроксимируемости конечными  $p$ -группами некоторых групп с одним определяющим соотношением [19] и HNN-расширения конечно порожденной нильпотентной группы с конечными связанными подгруппами [23], а также HNN-расширения с центральными связанными подгруппами. Последнюю конструкцию и относящиеся к ней утверждения рассмотрим более подробно.

В [20, 21] (см. также: [22]) Д. И. Молдаванским была предложена следующая идея исследования аппроксимируемости HNN-расширений соответственно конечными группами и конечными  $p$ -группами.

Положим  $K_0 = G$ ,  $H_1 = H$ ,  $K_1 = K$  и, если подгруппы  $H_i$  и  $K_i$  уже определены, то  $H_{i+1} = H_i \cap K_i$ ,  $K_{i+1} = H_{i+1}\varphi$ . Тогда для любого  $i \geq 0$

подгруппы  $H_{i+1}$  и  $K_{i+1}$  содержатся в  $K_i$ , и потому можно построить HNN-расширение

$$K_i^* = \langle K_i, t; t^{-1}H_{i+1}t = K_{i+1}, \varphi \rangle$$

группы  $K_i$  с подгруппами  $H_{i+1}$  и  $K_{i+1}$ , связанными при помощи ограниченного изоморфизма  $\varphi$  на подгруппу  $H_{i+1}$  (здесь это ограничение обозначено тем же символом  $\varphi$ ). Д. И. Молдавскому удалось показать, что если подгруппы  $H$  и  $K$  лежат в центре группы  $G$ , то для любого  $i$  семейства совместимых подгрупп HNN-расширений  $K_i^*$  и  $K_{i+1}^*$  обладают некоторыми одинаковыми свойствами, и потому аппроксимируемость этих HNN-расширений имеет место одновременно. Способ, с помощью которого это было доказано, он назвал *методом спуска и подъема совместимых подгрупп*, так как совместимая подгруппа группы  $K_{i+1}$  строится по совместимой подгруппе группы  $K_i$ , и наоборот.

Данный метод позволяет получить новый результат об аппроксимируемости группы  $G^*$ , если для некоторого  $n$  имеет место равенство  $H_n = K_n$ . В этом случае HNN-расширение  $K_n^*$  оказывается обычным расширением группы  $K_n$  при помощи бесконечной циклической группы, и, таким образом, вопрос об аппроксимируемости исходного HNN-расширения сводится к решению, вообще говоря, более простой задачи об аппроксимируемости некоторого расщепляемого расширения. Основные утверждения, доказанные Д. И. Молдавским, выглядят следующим образом.

**Теорема 3.1** [20]. Пусть  $H$  и  $K$  — собственные конечно порожденные центральные подгруппы группы  $G$  и пусть все подгруппы, лежащие в подгруппе  $HK$  и имеющие в ней конечный индекс, финитно отделимы в группе  $G$ . Группа  $G^*$  является финитно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда для некоторого  $n \geq 1$  имеет место равенство  $H_n = K_n$ .

**Теорема 3.2** [21]. Пусть  $H$  и  $K$  — собственные конечно порожденные центральные подгруппы группы  $G$ , группа  $G$  аппроксимируется конечными  $p$ -группами и все ее центральные  $p'$ -изолированные подгруппы отделимы в классе конечных  $p$ -групп. Группа  $G^*$  аппроксимируется конечными  $p$ -группами тогда и только тогда, когда

- (1) подгруппы  $H$  и  $K$   $p'$ -изолированы в группе  $G$ ;
- (2) для некоторого  $n \geq 1$  имеет место равенство  $H_n = K_n$  (и потому ограничение изоморфизма  $\varphi$  на подгруппу  $H_n$  оказывается ее автоморфизмом);
- (3) пересечение всех  $\varphi$ -инвариантных подгрупп  $N$  конечного  $p$ -индекса группы  $H_n$  таких, что порядок автоморфизма  $\varphi_N$  фактор-группы  $H_n/N$ , индуцированного отображением  $\varphi$ , является степенью числа  $p$ , тривиально.

Следует обратить внимание на то, что согласно формулировкам теорем 3.1 и 3.2 подгруппы  $H$  и  $K$  содержатся в группе  $G$  собственным образом, т. е. здесь рассматриваются только HNN-расширения, не являющиеся нисходящими. При этом равенство  $H_n = K_n$  для некоторого  $n$  оказывается необходимым условием аппроксимируемости группы  $G^*$ , так что специально накладывать данное ограничение не нужно. Зато приходится требовать отделимости некоторых подгрупп: она необходима для возможности



подъема совместимых подгрупп. Пункт 3 в формулировке теоремы 3.2 — это не что иное, как необходимое и достаточное условие аппроксимируемости конечными  $p$ -группами обычного расширения группы  $H_n$  при помощи автоморфизма, которым в силу п. 2 является ограничение на указанную группу изоморфизма  $\varphi$ .

#### 4. Новые результаты

Теперь перейдем к описанию некоторых новых результатов, которые нам удалось получить в данной области. Оказалось, что метод спуска и подъема совместимых подгрупп можно применить к изучению аппроксимируемости любым замкнутым относительно факторизации корневым классом групп. Основная техническая сложность при этом заключалась как раз в замене очень специфического рассуждения, использовавшегося в случае конечных  $p$ -групп.

Всюду далее будем предполагать, что  $\mathcal{C}$  — нетривиальный замкнутый относительно факторизации корневой класс групп,  $G$  —  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемая группа,  $H$  и  $K$  — собственные центральные подгруппы группы  $G$ . Если класс  $\mathcal{C}$  состоит только из периодических групп, то через  $\pi(\mathcal{C})$  будем также обозначать множество всех простых делителей порядков элементов всевозможных  $\mathcal{C}$ -групп. Одним из утверждений, доказанных с помощью обобщения метода спуска и подъема совместимых подгрупп, является

**Теорема 4.1.** Пусть класс  $\mathcal{C}$  состоит только из периодических групп и для некоторого  $n$  имеет место равенство  $H_n = H_{n+1}$ . Пусть также существует нормальная подгруппа  $Q$  группы  $G$ , удовлетворяющая соотношению  $G/Q \in \mathcal{C}$  и хотя бы одному из следующих двух условий:

- ( $\alpha$ ) подгруппа  $Q$  содержится в  $H \cap K$  и является  $\varphi$ -инвариантной;
- ( $\beta$ )  $H \cap Q = 1 = K \cap Q$ .

*HNN-расширение  $G^*$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемо тогда и только тогда, когда*

(1)  $H_n = K_n$  (и потому ограничение изоморфизма  $\varphi$  на подгруппу  $H_n$  является автоморфизмом этой подгруппы);

(2) подгруппа  $E$  группы  $G^*$ , порожденная подгруппой  $H_n$  и элементом  $t$ ,  $\mathcal{C}$ -аппроксимируема.

Легко видеть, что подгруппа  $E$  из п. 2 теоремы 4.1 в действительности представляет собой расщепляемое расширение подгруппы  $H_n$  при помощи бесконечной циклической группы, порожденной элементом  $t$ . В формулировку теоремы намеренно не включен критерий ее  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости, поскольку этот вопрос заслуживает отдельного рассмотрения. Два таких критерия будут приведены ниже. Заметим также, что если подгруппа  $Q$  имеет конечный индекс в  $G$  (а это верно, например, если класс  $\mathcal{C}$  состоит только из конечных групп), то каждое из условий  $\alpha$ ,  $\beta$  влечет равенство  $H_n = H_{n+1}$  для некоторого  $n$ .

Основными приложениями теоремы 4.1 служат два следствия, сформулированные ниже, в первом из которых связанные подгруппы конечны, а во втором имеют конечные индексы в группе  $G$ . Отметим, что конечности индексов подгрупп  $H$  и  $K$ , вообще говоря, недостаточно для обрыва убывающей цепочки подгрупп  $H_i$ , поэтому в формулировке следствия 4.3 данное условие присутствует явным образом.

**Следствие 4.2.** Пусть класс  $\mathcal{C}$  состоит только из периодических групп, подгруппы  $H$  и  $K$  конечны. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для некоторого  $n$  имеет место равенство  $H_n = K_n$ , и потому ограничение  $\varphi'$  изоморфизма  $\varphi$  на подгруппу  $H_n$  является ее автоморфизмом конечного порядка.

2. HNN-расширение  $G^*$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемо в том и только том случае, когда все простые делители порядка автоморфизма  $\varphi'$  содержатся во множестве  $\pi(\mathcal{C})$ .

**Следствие 4.3.** Пусть класс  $\mathcal{C}$  состоит только из периодических групп, подгруппы  $H$  и  $K$  имеют конечные индексы в группе  $G$  и для некоторого  $n$  справедливо равенство  $H_n = H_{n+1}$ . HNN-расширение  $G^*$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемо тогда и только тогда, когда

- (1)  $G/H \in \mathcal{C}$  и  $G/K \in \mathcal{C}$ ;
- (2)  $H_n = K_n$ ;
- (3) подгруппа  $E$  группы  $G^*$ , порожденная подгруппой  $H_n$  и элементом  $t$ ,  $\mathcal{C}$ -аппроксимируема.

Пусть  $\pi$  — некоторое множество простых чисел. Легко видеть, что пересечение произвольного числа  $\pi'$ -изолированных подгрупп заданной группы снова является  $\pi'$ -изолированной подгруппой этой группы. Поэтому для любой группы  $X$  и для любой ее подгруппы  $Y$  определена наименьшая  $\pi'$ -изолированная подгруппа группы  $X$ , содержащая  $Y$ . Эта подгруппа называется  $\pi'$ -изолятором подгруппы  $Y$  в группе  $X$  и далее будет обозначаться через  $\mathcal{I}_{\pi'}(X, Y)$ .

Следуя [27], абелеву группу будем называть  $\pi$ -ограниченной, если в произвольной ее фактор-группе все примарные компоненты, соответствующие числам из множества  $\pi$ , конечны. Нильпотентную (разрешимую) группу назовем  $\pi$ -ограниченной, если она обладает конечным центральным (соответственно субнормальным) рядом с абелевыми  $\pi$ -ограниченными факторами. Легко видеть, что конечно порожденные нильпотентные и полициклические группы являются соответственно  $\pi$ -ограниченными нильпотентными и  $\pi$ -ограниченными разрешимыми для любого непустого множества простых чисел  $\pi$ . Отметим также, что если  $\pi$  содержит все простые числа, то  $\pi$ -ограниченная разрешимая группа оказывается ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева [17].

В [27] показано, что любой субнормальный ряд  $\pi$ -ограниченной разрешимой группы имеет  $\pi$ -ограниченные абелевы факторы. В частности, если  $\pi$ -ограниченная разрешимая группа абелева, то она является  $\pi$ -ограниченной абелевой, а если нильпотентна, то  $\pi$ -ограниченной нильпотентной. Таким образом, об абелевой группе можно говорить, что она  $\pi$ -ограничена, не уточняя, какой именно класс  $\pi$ -ограниченных групп (абелевых, нильпотентных или разрешимых) имеется в виду.

Еще одним результатом, полученным с помощью метода спуска и подъема совместимых подгрупп, является следующая теорема, представляющая собой обобщение теорем 3.1 и 3.2 Д. И. Молдаванского.

**Теорема 4.4.** Пусть класс  $\mathcal{C}$  состоит только из периодических групп и выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:

( $\alpha$ ) подгруппы  $H$  и  $K$  конечно порождены;  
 ( $\beta$ ) множество  $\pi(\mathcal{C})$  конечно и подгруппы  $H$  и  $K$   $\pi(\mathcal{C})$ -ограничены;  
 ( $\gamma$ ) класс  $\mathcal{C}$  состоит из конечных групп, подгруппы  $H$  и  $K$   $\pi(\mathcal{C})$ -ограничены и  $\pi_1(\mathcal{C})'$ -изолированы в группе  $G$  для некоторого конечного подмножества  $\pi_1(\mathcal{C})$  множества  $\pi(\mathcal{C})$ .

Пусть также для любого  $i \geq 0$  и для любой подгруппы  $N \leq H_{i+1}K_{i+1}$  такой, что  $(H_{i+1}K_{i+1})/N \in \mathcal{C}$ , подгруппа  $\mathcal{I}_{\pi(\mathcal{C})'}(K_i, N)$   $\mathcal{C}$ -отделима в группе  $K_i$ . HNN-расширение  $G^*$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемо тогда и только тогда, когда

- (1)  $H_n = K_n$  для некоторого  $n$ ;
- (2) подгруппа  $E$  группы  $G^*$ , порожденная подгруппой  $H_n$  и элементом  $t$ ,  $\mathcal{C}$ -аппроксимируема;
- (3) подгруппы  $H$  и  $K$   $\pi(\mathcal{C})'$ -изолированы в группе  $G$ .

Конкретные примеры применения данной теоремы содержатся в следствиях 4.5 и 4.6. В первом из них группа  $G$  представляет собой расширение ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева группы, но класс  $\mathcal{C}$  таков, что множество  $\pi(\mathcal{C})$  содержит все простые числа (например, это может быть класс всех конечных разрешимых групп). Во втором следствии данного ограничения на класс  $\mathcal{C}$  нет, но группа  $G$  должна быть расширением  $\pi(\mathcal{C})$ -ограниченной нильпотентной группы.

**Следствие 4.5.** Пусть класс  $\mathcal{C}$  состоит только из периодических групп и множество  $\pi(\mathcal{C})$  содержит все простые числа. Пусть также  $G$  — расширение ограниченной разрешимой группы при помощи  $\mathcal{C}$ -группы и выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

- ( $\alpha$ ) подгруппы  $H$  и  $K$  конечно порождены;
- ( $\beta$ ) класс  $\mathcal{C}$  состоит из конечных групп, подгруппы  $H$  и  $K$   $\pi'$ -изолированы в группе  $G$  для некоторого конечного множества  $\pi$  простых чисел.

HNN-расширение  $G^*$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемо тогда и только тогда, когда  $H_n = K_n$  для некоторого  $n$ .

**Следствие 4.6.** Пусть класс  $\mathcal{C}$  состоит только из периодических групп. Пусть также  $G$  — расширение  $\pi(\mathcal{C})$ -ограниченной нильпотентной группы при помощи  $\mathcal{C}$ -группы и выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:

- ( $\alpha$ ) подгруппы  $H$  и  $K$  конечно порождены;
- ( $\beta$ ) множество  $\pi(\mathcal{C})$  конечно и подгруппы  $H$  и  $K$   $\pi(\mathcal{C})$ -ограничены;
- ( $\gamma$ ) класс  $\mathcal{C}$  состоит из конечных групп, подгруппы  $H$  и  $K$   $\pi_1(\mathcal{C})'$ -изолированы в группе  $G$  для некоторого конечного подмножества  $\pi_1(\mathcal{C})$  множества  $\pi(\mathcal{C})$ .

HNN-расширение  $G^*$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемо тогда и только тогда, когда

- (1)  $H_n = K_n$  для некоторого  $n$ ;
- (2) подгруппа  $E$  группы  $G^*$ , порожденная подгруппой  $H_n$  и элементом  $t$ ,  $\mathcal{C}$ -аппроксимируема;
- (3) подгруппы  $\{1\}$ ,  $H$  и  $K$   $\pi(\mathcal{C})'$ -изолированы в группе  $G$ .

Далее приводятся два утверждения, представляющие собой упоминавшиеся выше критерии аппроксимируемости подгруппы  $E$  группы  $G^*$ , порожденной подгруппой  $H_n$  и элементом  $t$ , в предположении, что спра-

ведливо равенство  $H_n = K_n$  и класс  $\mathcal{C}$  состоит только из периодических групп. Первый из них — это обобщение критерия аппроксимируемости конечными  $p$ -группами из формулировки теоремы 3.1, второй — его частный случай, который получается, если ограничение изоморфизма  $\varphi$  на подгруппу  $H_n$  имеет конечный порядок.

**Предложение 4.7.** *Группа  $E$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда тривиальным является пересечение всех  $\varphi$ -инвариантных подгрупп  $N$  группы  $H_n$ , удовлетворяющих следующим условиям:*

- (1)  $H_n/N \in \mathcal{C}$ ;
- (2) порядок автоморфизма  $\varphi_N$  группы  $H_n/N$ , индуцированного изоморфизмом  $\varphi$ , конечен и все его простые делители содержатся во множестве  $\pi(\mathcal{C})$ .

**Предложение 4.8.** *Если порядок  $q$  ограничения изоморфизма  $\varphi$  на подгруппу  $H_n$  конечен, то группа  $E$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда группа  $H_n$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируема и все простые делители числа  $q$  содержатся во множестве  $\pi(\mathcal{C})$ .*

Во всех описанных к настоящему моменту новых результатах предполагалось, что класс  $\mathcal{C}$  состоит только из периодических групп. Метод спуска и подъема применяется и в случае, когда данное условие не выполняется. Однако утверждения, которые при этом нам удалось получить, можно доказать с помощью более простых прямых рассуждений. Примерами результатов такого рода являются две теоремы, приводимые ниже.

**Теорема 4.9.** *Пусть класс  $\mathcal{C}$  содержит хотя бы одну непериодическую группу. Тогда следующие утверждения равносильны и при выполнении любого из них HNN-расширение  $G^*$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемо.*

1. Существует гомоморфизм группы  $G$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , инъективный на подгруппах  $H$  и  $K$ .
2. Существует гомоморфизм группы  $G^*$  на группу из класса  $\mathcal{C}$ , инъективный на подгруппах  $H$  и  $K$ .

**Теорема 4.10.** *Пусть класс  $\mathcal{C}$  содержит хотя бы одну непериодическую группу.*

1. *Если существует подгруппа  $Q$ , содержащаяся в  $H \cap K$ , являющаяся  $\varphi$ -инвариантной и такая, что  $G/Q \in \mathcal{C}$ , то HNN-расширение  $G^*$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемо.*
2. *Если подгруппы  $H$  и  $K$  имеют в группе  $G$  конечные индексы, то верно и обратное: из  $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости HNN-расширения  $G^*$  следует существование подгруппы  $Q$ , содержащейся в  $H \cap K$ , являющейся  $\varphi$ -инвариантной и такой, что  $G/Q \in \mathcal{C}$ .*

Необходимо отметить, что теорема 4.9 и первое утверждение теоремы 4.10 справедливы и без предположения о том, что подгруппы  $H$  и  $K$  содержатся в группе  $G$  собственным образом. Поэтому из теоремы 4.9 вытекает сформулированное ниже утверждение, обобщающее упоминавшийся в параграфе 2 результат Е. Рапписа и Д. Варсосу [50] об аппроксимируемости разрешимыми группами HNN-расширения конечно порожденной абелевой группы.

**Следствие 4.11.** *Произвольное HNN-расширение разрешимой группы с центральными связанными подгруппами аппроксимируется разрешимыми группами.*

Из теорем 4.1 и 4.9 вытекает также

**Следствие 4.12.** *Пусть  $\mathcal{C}$  — произвольный нетривиальный корневой класс групп, замкнутый относительно факторизации, и пусть  $H \cap K = 1$ . Если существует нормальная подгруппа  $Q$  группы  $G$ , удовлетворяющая условиям  $G/Q \in \mathcal{C}$  и  $H \cap Q = 1 = K \cap Q$ , то HNN-расширение  $G^*$   $\mathcal{C}$ -аппроксимируемо.*

Следствие 4.12 обобщает сформулированный в предыдущем параграфе результат Д. В. Гольцова об аппроксимируемости корневым классом групп HNN-расширения с тривиально пересекающимися центральными связанными подгруппами. Необходимо, однако, отметить, что прямое доказательство данного результата, приведенное в [11], значительно короче и проще.

#### Библиографический список

1. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203–1215.
2. Азаров Д. Н. О почти аппроксимируемости конечными  $p$ -группами некоторых классов групп и свободных конструкций // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 80–87.
3. Азаров Д. Н., Гольцов Д. В. Почти аппроксимируемость конечными  $p$ -группами свободного произведения двух групп с конечными объединенными подгруппами // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 94–97.
4. Азаров Д. Н., Гольцов Д. В. О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 86–91.
5. Азаров Д. Н., Гольцов Д. В. О почти аппроксимируемости конечными  $p$ -группами свободных произведений групп с одной объединенной конечной подгруппой // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 74–77.
6. Азаров Д. Н., Иванова Е. А. К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. 1999. Вып. 2. С. 5–7.
7. Азаров Д. Н., Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. 2008. Вып. 6. С. 29–42.
8. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Научные труды Ивановского государственного университета. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6–10.
9. Гольцов Д. В. О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Чебышевский сборник. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 34–41.
10. Гольцов Д. В. Об аппроксимируемости корневыми классами свободных произведений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 87–90.
11. Гольцов Д. В. Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Математические заметки. 2015. Т. 97, вып. 5. С. 665–669.

12. Гольцов Д. В., Яцкин Н. И. Классы групп и подгрупповые топологии // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 115–128.
13. Гудовщикова А. С., Соколов Е. В. Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных свободных произведений двух групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 115–123.
14. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 5-е изд. СПб.: Лань, 2009. 287 с.
15. Коптева А. А., Соколов Е. В. Некоторые аппроксимационные свойства HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 78–88.
16. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 447 с.
17. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Ученые записки Ивановского государственного педагогического института. 1958. Т. 18. С. 49–60.
18. Молдаванский Д. И. О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сибирский математический журнал. 1967. Т. 8, № 6. С. 1370–1384.
19. Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными  $p$ -группами HNN-расширений // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. Вып. 3. С. 129–140.
20. Молдаванский Д. И. Финитная аппроксимируемость некоторых HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2002. Вып. 3. С. 123–133.
21. Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными  $p$ -группами некоторых HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2003. Вып. 3. С. 102–116.
22. Молдаванский Д. И. Аппроксимационные свойства HNN-расширений групп и групп с одним определяющим соотношением: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Иваново, 2006.
23. Молдаванский Д. И. Об аппроксимируемости конечными  $p$ -группами HNN-расширений нильпотентных групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2006. Вып. 3. С. 128–132.
24. Молдаванский Д. И. Об аппроксимируемости групп Баумслэга – Солитэра // Чебышевский сборник. Тула, 2012. Т. 13, вып. 1. С. 110–114.
25. Савельичева Н. С., Соколов Е. В. Одно необходимое условие нильпотентной аппроксимируемости HNN-расширения нильпотентной группы // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64–68.
26. Соколов Е. В. Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения. 2011. Вып. 8. С. 101–104.
27. Соколов Е. В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных  $\pi$ -групп // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.
28. Соколов Е. В. Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Математические заметки. 2015. Т. 97, вып. 5. С. 767–780.
29. Соколов Е. В., Туманова Е. А. Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.
30. Туманова Е. А. Аппроксимируемость конечными  $p$ -группами HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 139–141.
31. Туманова Е. А. К вопросу об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Математика и ее приложения. 2013. Вып. 10. С. 61–64.
32. Туманова Е. А. Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сборник. Тула, 2013. Т. 14, вып. 3. С. 134–141.
33. Туманова Е. А. Об аппроксимируемости конечными  $\pi$ -группами HNN-расширений групп // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 94–102.

34. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133–137.
35. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами свободных конструкций групп : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иваново, 2014.
36. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными  $\pi$ -группами обобщенных свободных произведений групп // Математические заметки. 2014. Т. 95, вып. 4. С. 605–614.
37. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.
38. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслэга — Солитэра // Мальцевские чтения, 2015 : тезисы докладов Международной научной конференции, посвященной 75-летию Ю. Л. Ершова, Новосибирск, 3–7 мая 2015 г. Новосибирск : НГУ, 2015. С. 129.
39. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Известия вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.
40. *Aschenbrenner M., Friedl S.* A criterion for HNN extensions of finite  $p$ -groups to be residually  $p$  // J. Pure Appl. Algebra. 2011. Vol. 215. P. 2280–2289.
41. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193–209.
42. *Baumslag B., Tretkoff M.* Residually finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6. P. 179–194.
43. *Cohen D. E.* Residual finiteness and Britton's lemma // J. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1977. Vol. 16, № 2. P. 232–234.
44. *Dyer J. L.* Separating conjugates in free-by-finite groups // J. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1979. Vol. 20, № 2. P. 215–221.
45. *Evans B.* Cyclic amalgamations of residually finite groups // Pacific J. Math. 1974. Vol. 55. P. 371–379.
46. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1957. Vol. 7. P. 29–62.
47. *Kim G., Tang C. Y.* Cyclic subgroup separability of HNN-extensions with cyclic associated subgroups // Can. Math. Bull. 1999. Vol. 42, № 3. P. 335–343.
48. *Moldavanskii D. I.* On some residual properties of Baumslag — Solitar groups // arXiv: 1310.3585 [math.GR]. 2013. URL: <http://arxiv.org/abs/1310.3585> (дата обращения: 17.01.2016).
49. *Niblo G. A.* H.N.N. extensions of a free group by  $\mathbb{Z}$  which are subgroup separable // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 3. 1990. Vol. 61, № 1. P. 18–32.
50. *Raptis E., Varsos D.* Residual properties of HNN-extensions with base group an Abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1989. Vol. 59, № 3. P. 285–290.
51. *Raptis E., Varsos D.* The residual nilpotence of HNN-extensions with base group a finite or a f. g. Abelian group // J. Pure Appl. Algebra. 1991. Vol. 76, № 2. P. 167–178.
52. *Raptis E., Varsos D.* The residual finiteness of HNN-extensions and generalized free products of nilpotent groups: a characterization // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. 1992. Vol. 53, № 3. P. 408–420.
53. *Rosenberger G., Sasse S. L.* Residual properties of HNN-extensions with cyclic associated subgroups // Algebra Colloq. 1996. Vol. 3, № 1. P. 91–96.
54. *Shirvani M.* On residually finite HNN-extensions // Arch. Math. 1985. Vol. 44. P. 110–115.
55. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43. P. 856–860.
56. *Tieudjo D.* On root class residuality of HNN-extensions // IMHOTEP : J. Afr. Math. Pures Appl. 2005. Vol. 6. P. 18–23.
57. *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP J. of Algebra, Number Theory and Appl. 2010. Vol. 18, № 2. P. 125–143.
58. *Wong K. B., Wong P. C.* Residual finiteness, subgroup separability and conjugacy separability of certain HNN extensions // Math. Slovaca. 2012. Vol. 62, № 5. P. 875–884.

УДК 517.977

Б. Я. Солон

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ pm-СТЕПЕНИ

Рассматриваются степени перечислимости функций относительно самой сильной сводимости по перечислимости, так называемой pm-сводимости, введенной Ю. Л. Ершовым.

**Ключевые слова:** операторы перечисления, частично вычислимые операторы, pm-сводимость, функциональные pm-степени.

The article is considered the function degrees of enumerability on the very strong enumeration reducibility, the so-called pm-reducibility introduced by Yu. L. Ershov.

**Key words:** enumeration operators, partial recursive operators, pm-reducibility, functional pm-degrees.

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в [3]. Пусть  $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$  — множество натуральных чисел;  $A, B, \dots, X, Y$  (с индексами или без) — подмножества  $\omega$ . Пусть, как обычно,  $\langle x, y \rangle$  — канторовский номер упорядоченной пары  $(x, y)$ . Пусть  $PF$  — множество одноместных частичных арифметических функций. Для данной частичной функции  $\alpha$  обозначим через  $dom(\alpha)$ ,  $ran(\alpha)$  и  $graph(\alpha) = \{\langle x, \alpha(x) \rangle : x \in dom(\alpha)\}$  область определения, множество значений и график  $\alpha$  соответственно. Будем писать  $\alpha(x) \downarrow$ , если  $x \in dom(\alpha)$ , и  $\alpha(x) \uparrow$  — в противном случае. Для обозначения частичных функций из  $PF$  будем использовать малые греческие буквы начала алфавита:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ . Мы ограничим использование символов  $f, g, h$  только для обозначения *тотальных* функций, т. е. таких, что  $dom(f) = \omega$ . Множество тотальных функций обозначим через  $TF$ . Если  $graph(\alpha) \subseteq graph(\beta)$ , то мы будем писать  $\alpha \subseteq \beta$  для краткости. Множество  $A$  называется *однозначным*, если  $A = graph(\alpha)$  для некоторой частичной функции  $\alpha$ . Обозначим через  $SV$  класс всех однозначных множеств. Термин «*функциональный оператор*» мы будем использовать в случае однозначных отображений  $PF \rightarrow PF$  (необязательно всюду определенных).

Пусть, как обычно,  $\varphi_z$  — частично вычислимая функция с гёделевым номером  $z$  и  $\Phi_z(X) = \{x : (\exists u)[\langle x, u \rangle \in W_z \wedge D_u \subseteq X]\}$  — результат применения  $e$ -оператора с гёделевым номером  $z$  к множеству  $X$ . Пусть  $E$  — множество всех  $e$ -операторов. Говорят, что множество  $A$  *сводимо по перечислимости* к множеству  $B$ , и пишут  $A \leq_e B$ , если  $A = \Phi(B)$  для некоторого  $\Phi \in E$ .

**Определение 1.** Функциональный оператор  $\Psi$  называется *частично вычислимым* (ч.в.) (в терминологии Х. Роджерса — *частично рекурсивным*), если он определяется некоторым  $e$ -оператором  $\Phi$ , т. е. для любых  $\alpha, \beta \in PF$

$$\alpha = \Psi(\beta) \Leftrightarrow (\exists z)[graph(\alpha) = \Phi_z(graph(\beta))].$$



**Определение 2.** Ч.в. оператор  $\Psi$  называется *вычислимым* (в.) (в терминологии Х. Роджерса — *рекурсивным*), если он определяется таким е-оператором  $\Phi$ , что функциональный оператор  $\Psi: PF \rightarrow PF$  является всюду определенным.

Введем обозначения:  $PC$  — множество всех ч.в. операторов;  $C$  — множество всех в. операторов. Будем говорить, что  $\alpha$  *е-сводится* (*се-сводится*) к  $\beta$  и писать  $\alpha \leq_e \beta$  ( $\alpha \leq_{ce} \beta$ ), если  $\alpha = \Psi(\beta)$  для некоторого  $\Psi \in PC$  ( $\Psi \in C$ ).

Введем усиление сводимости по перечислимости, впервые рассмотренное Ю. Л. Ершовым [1].

**Определение 3.** Множество  $A$  *pm-сводится* к множеству  $B$  (обозначение  $A \leq_{pm} B$ ), если существует ч.в. функция  $\varphi$  такая, что

$$(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow \varphi(x) \downarrow \wedge \varphi(x) \in B].$$

Ясно, что  $A \leq_{pm} B \Rightarrow A \leq_e B$  для любых множеств  $A$  и  $B$ . Обозначим через  $E_{pm}$  множество е-операторов, осуществляющих pm-сводимость множеств, и через  $PC_{pm}$  — множество функциональных операторов, определяемых операторами из  $E_{pm}$ . Элементы множества  $E_{pm}$  будем называть *ч.в. pm-операторами*. Итак,

$$\Phi \in E_{pm} \Leftrightarrow \exists z \forall X \forall x [x \in \Phi(X) \Leftrightarrow \varphi_z(x) \downarrow \wedge \varphi_z(x) \in X].$$

Легко понять, что е-оператор

$$\Phi_z(X) = \{x : (\exists u)[\langle x, u \rangle \in W_z \wedge D_u \subseteq X]\}$$

принадлежит множеству  $E_{pm}$  тогда и только тогда, когда множество  $W_z$  однозначено и

$$\forall x \forall u [\langle x, u \rangle \in W_z \Rightarrow |D_u| \leq 1].$$

**Определение 4.** Функция  $\alpha$  *pm-сводится* к функции  $\beta$  (обозначение  $\alpha \leq_{pm} \beta$ ), если  $graph(\alpha) \leq_{pm} graph(\beta)$ .

**Предложение 1.** Для любых  $\alpha, \beta \in PF$

$$\alpha \leq_{pm} \beta \Leftrightarrow (\exists \Psi \in PC_{pm})[\alpha = \Psi(\beta)].$$

*Доказательство* следует непосредственно из определения 4.

Усиление pm-сводимости функций можно осуществить с помощью функциональных операторов из класса  $C_{pm}$ .

**Определение 5.** Функция  $\alpha$  *срт-сводится* к функции  $\beta$  (обозначение  $\alpha \leq_{срт} \beta$ ), если  $\alpha = \Psi(\beta)$  для некоторого е-оператора  $\Psi \in C_{pm}$ , где  $C_{pm}$  — подмножество  $PC_{pm}$ , состоящее из вычислимых pm-операторов.

Чтобы доказать, что в самом деле произошло усиление pm-сводимости функций, т. е. привести пример пары функций  $\alpha, \beta$  таких, что  $\alpha \leq_{pm} \beta$  и  $\alpha \not\leq_{срт} \beta$ , введем понятие функции, дополняемой до ч.в. функции.

**Определение 6.** Функция  $\alpha \in PF$  называется *дополняемой до ч.в. функции*, если  $\alpha \subseteq \varphi_z$  для некоторого  $z$ .

Множество дополняемых до ч.в. функций обозначим через  $EPF$ . Например, любая (частичная) функция-константа является дополняемой до ч.в. функции. В то же время существуют частичные функции, которые не дополняемы до ч.в. функций. Простейшие свойства функций из  $EPF$  приведем в следующем предложении.

**Предложение 2.** Для любых  $\alpha, \beta \in PF$

- (i)  $[(\beta \in EPF) \wedge (\alpha \leq_{ce} \beta)] \Rightarrow \alpha \in EPF$ ;
- (ii)  $[(\alpha \in EPF) \wedge (\alpha \leq_e \beta)] \Rightarrow \alpha \leq_{ce} \beta$ .

*Доказательство.*

(i) Пусть  $\alpha \leq_{ce} \beta$  и  $\Psi$  — такой в. оператор, что  $\alpha = \Psi(\beta)$ , и  $\varphi$  — такая ч.в. функция, что  $\beta \subseteq \varphi$ . Пусть  $\psi = \Psi(\varphi)$ , ясно, что  $\psi$  — ч.в. функция и, в силу монотонности е-оператора  $\Phi$ , определяющего  $\Psi$ ,  $\alpha \subseteq \psi$ .

(ii) Пусть  $\alpha \leq_e \beta$  и  $\Phi_z$  — такой е-оператор, что

$$\text{graph}(\alpha) = \Phi_z(\text{graph}(\beta)),$$

и  $\varphi$  — такая ч.в. функция, что  $\alpha \subseteq \varphi$ . Определим е-оператор  $\Upsilon$ , полагая  $\Upsilon(X) = \Phi_z(X) \cap \text{graph}(\varphi)$  для любого множества  $X$ . Докажем, что  $\text{graph}(\alpha) = \Upsilon(\text{graph}(\beta))$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \Upsilon(\text{graph}(\beta)) &= \Phi_z(\text{graph}(\beta)) \cap \text{graph}(\varphi) = \\ &= \text{graph}(\alpha) \cap \text{graph}(\varphi) = \text{graph}(\alpha). \end{aligned}$$

Так как  $\Upsilon(X) \subseteq \text{graph}(\varphi)$  для любого множества  $X$ , то  $\Upsilon$  — вычисляемый (функциональный) оператор, следовательно,  $\alpha \leq_{ce} \beta$ .

**Следствие 1.** Для любых  $\alpha, \beta \in PF$

- (i)  $[(\beta \in EPF) \wedge (\alpha \leq_{cpr} \beta)] \Rightarrow \alpha \in EPF$ ;
- (ii)  $[(\alpha \in EPF) \wedge (\alpha \leq_{pr} \beta)] \Rightarrow \alpha \leq_{cpr} \beta$ .

**Предложение 3.** Существуют  $\alpha, \beta \in PF$  такие, что  $\alpha \leq_{pr} \beta$  и  $\alpha \not\leq_{cpr} \beta$ .

*Доказательство.* Пусть  $f \in TF$  — произвольная невычислимая функция, тогда, очевидно,  $f \notin EPF$ . Обозначим через  $\alpha = \chi_{\text{graph}(f)}$ , где  $\chi_A$  — частично характеристическая функция множества  $A$ . Ясно, что  $f \leq_{pr} \alpha$ . Предположим, что  $f \leq_{cpr} \alpha$ . Так как  $\alpha = \chi_{\text{graph}(f)} \subseteq 0(x)$ , где  $0(x)$  — функция-константа 0, то  $\alpha \in EPF$ . Следствие 1 (i) в этом случае утверждает, что  $f \in EPF$ , а это противоречит выбору  $f$ . Предложение доказано.

Как обычно, пусть

$$\alpha \equiv_{pr} \beta \Leftrightarrow \alpha \leq_{pr} \beta \wedge \beta \leq_{pr} \alpha$$

и  $\text{deg}_{pr}(\alpha) = \{\gamma : \gamma \equiv_{pr} \alpha\}$  — функциональная  $pr$ -степень функции  $\alpha$  и  $\text{deg}_{cpr}(\alpha) = \{\gamma : \gamma \equiv_{cpr} \alpha\}$  —  $cpr$ -степень функции  $\alpha$ . Пусть  $L_{pr}$  — ч.у. множество функциональных  $pr$ -степеней и  $L_{cpr}$  —  $cpr$ -степеней. Множество  $L_{pr}(\leq \mathbf{a})$ , где  $\mathbf{a} = \text{deg}_{pr}(\alpha)$ , состоит из всех функциональных  $pr$ -степеней  $\leq \mathbf{a}$ .

Очевидно, что  $\alpha \leq_{cpr} \beta \Rightarrow \alpha \leq_{pr} \beta$  для любых  $\alpha, \beta \in PF$ , следовательно, любая функциональная  $pr$ -степень состоит из некоторого ч.у. множества  $cpr$ -степеней. Обозначим через  $L_{pr}^{cpr}(\mathbf{a})$  ч.у. множество  $cpr$ -степе-

ней, содержащихся в функциональной  $pm$ -степени  $\mathbf{a} = deg_e(\alpha)$ . Функциональная  $pm$ -степень  $\mathbf{a}$  называется *неразложимой* (на  $срм$ -степени), если  $|L_{pm}^{срм}(\mathbf{a})| = 1$ , в противном случае  $\mathbf{a}$  называется *разложимой*.

Функциональная  $pm$ -степень ( $срм$ -степень) называется *тотальной*, если она содержит некоторую тотальную функцию. Ч.у. множество тотальных функциональных  $pm$ -степеней обозначим через  $TL_{pm}$ , а тотальных  $срм$ -степеней — через  $TL_{срм}$ .

**Предложение 4.**  $(\forall \alpha \in PF)(\forall f \in TF)[\alpha \leq_{pm} f \Leftrightarrow \alpha \leq_{срм} f]$ .

*Доказательство.*  $\Leftarrow$ : Очевидно, что  $\alpha \leq_{срм} f \Rightarrow \alpha \leq_{pm} f$ .

$\Rightarrow$ : Пусть  $\alpha \leq_{pm} f$ , тогда существует оператор  $\Psi \in PC_{срм}$  такой, что  $\alpha = \Psi(f)$ . В этом случае по основной теореме об операторах [3, р. 195] существует в. оператор  $\Psi' \in C$  такой, что

$$(\forall f)[f \in dom(\Psi') \cap TF \wedge \Psi'(f) = \Psi(f)].$$

Так как  $\Psi'(f) = \Psi(f)$ , то  $\Psi' \in C_{срм}$ . В частности, для нашего случая имеем

$$\alpha = \Psi'(f) = \Psi(f),$$

следовательно,  $\alpha \leq_{срм} f$ . Предложение доказано.

Обозначим через  $TL_{pm}(\leq \mathbf{a}) = \{\mathbf{f} : \mathbf{f} \in TF \wedge \mathbf{f} \leq \mathbf{a}\}$ , частично упорядоченное отношением  $\leq$ . Ясно, что  $TL_{pm}(\leq \mathbf{a})$  является верхней полурешеткой для любой  $pm$ -степени  $\mathbf{a} = deg_{pm}(\alpha)$ .

**Предложение 5.**

(i) *срм-степень  $deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)})$  является наименьшим элементом ч.у. множества  $TL_{pm}(\leq \mathbf{a})$ , причем*

$$deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)}) = \{\beta : \beta \in EPF \cap deg_{pm}(\alpha)\};$$

(ii)  $\alpha \notin EPF \Rightarrow |L_{pm}^{срм}(deg_{pm}(\alpha))| \geq 2$ .

*Доказательство.*

(i) Так как  $\chi_{graph(\alpha)} \in EPF$  для любой функции  $\alpha$ , то  $\chi_{graph(\alpha)} \leq_{срм} \beta$  для любой функции  $\beta \in deg_{pm}(\alpha)$ . Следовательно,  $deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)})$  является наименьшим элементом ч.у. множества  $L_{pm}^{срм}(\alpha)$ , причем

$$deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)}) = \{\beta : \beta \in EPF \cap deg_{pm}(\alpha)\}$$

в силу предложения 2 (i).

(ii) Пусть  $\alpha \in PF$  не является дополняемой до ч.в. функции, рассмотрим  $deg_{срм}(\alpha)$  и  $deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)})$  как элементы  $L_{pm}^{срм}(deg_{срм}\alpha)$ .

Из (i) следует, что  $deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)}) \leq deg_{срм}(\alpha)$ . Если предположить, что  $deg_{срм}(\alpha) \leq deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)})$ , то  $deg_{срм}(\alpha) = deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)})$ , а так как  $deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)})$  состоит только из дополняемых до ч.в. функций, то  $\alpha \in EPF$ . Получено противоречие, следовательно,  $deg_{срм}(\alpha) \neq deg_{срм}(\chi_{graph(\alpha)})$  и  $L_{pm}^{срм}(deg_{срм}(\alpha))$  состоит не менее чем из двух  $срм$ -степеней.

Пусть  $\Psi \in PC_e$  — произвольный ч.в. оператор и  $n \in \omega$ , определим ч.в. оператор  $\Psi/n$ , полагая  $dom(\Psi/n) = dom(\Psi)$  и

$$(\forall \alpha \in dom(\Psi))[\Psi/n(\alpha)(x) = \Psi(\alpha)(\langle x, n \rangle)].$$

Приведем ряд определений из [2].

**Определение 7.** Ч.в. оператор  $\Psi$  называется *универсальным* (для множества  $PC_{pm}$ ), если

$$PC_{pm} = \{\Psi/n : n \in \omega\}.$$

**Предложение 6.** Пусть  $\Psi$  — универсальный оператор для  $PC_{pm}$ , тогда  $\Psi \notin PC_{pm}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\Psi \in PC_{pm}$  — универсальный оператор, тогда, в частности,  $dom(\Psi) = dom(\Psi')$  для любого ч.в. оператора  $\Psi' \in PC_{pm}$ , что невозможно.

Докажем, что  $C_{pm}$  обладает универсальным оператором  $\Psi$ , причем таким, что  $\Psi \in C_{pm}$ . Сначала докажем теорему, имеющую самостоятельное значение.

**Теорема 1.** Существует такая в. функция  $h(z)$ , что для всех  $z$

$$\Psi_{h(z)} \in C_{pm} \wedge (\Psi_z \in C_{pm} \Rightarrow \Psi_{h(z)} = \Psi_z).$$

*Доказательство.* Будем говорить, что однозначное множество  $A$  обладает свойством  $PM$  (или является  $PM$ -множеством), если

- 1)  $(\forall z, u)[\langle z, u \rangle \in A \Rightarrow |D_u| = 1]$ ;
- 2)  $(\forall x, y_1, y_2, u_1, u_2)[y_1 \neq y_2 \wedge \langle \langle x, y_1 \rangle, u_1 \rangle \in A \wedge \langle \langle x, y_2 \rangle, u_2 \rangle \in A \Rightarrow D_{u_1} \cup D_{u_2} \notin SV]$ .

Фактически  $A$  —  $PM$ -множество тогда и только тогда, когда

$$A_1 = \{x : (\exists y)[\langle x, y \rangle \in A]\} \notin SV \Rightarrow A_2 = \{y : (\exists x)[\langle x, y \rangle \in A]\} \notin SV.$$

Отметим два свойства  $PM$ -множеств:

- (i)  $A$  —  $PM$ -множество тогда и только тогда, когда любое конечное подмножество  $A$  является  $PM$ -множеством;
- (ii) всякое подмножество  $PM$ -множества является  $PM$ -множеством.

**Лемма.** Для любого  $z$   $pm$ -оператор  $\Psi_z$  всюду определен (на  $PF$ ) тогда и только тогда, когда  $W_z$  — в.п.  $PM$ -множество.

*Доказательство.* Пусть  $\Psi_z$  — вычислимый  $pm$ -оператор и определяется  $e$ -оператором  $\Phi_z(X) = \{x : \varphi_z(x) \downarrow \wedge \varphi_z(x) \in X\}$ . Если предположить, что  $W_z = dom(\varphi_z)$  не является  $PM$ -множеством, то существуют такая функция  $\alpha$  и такие  $x, y_1, y_2, u_1, u_2$ , что

$$y_1 \neq y_2 \wedge \langle \langle x, y_1 \rangle, u_1 \rangle \in W_z \wedge \langle \langle x, y_2 \rangle, u_2 \rangle \in W_z \wedge D_{u_1} \cup D_{u_2} \in graph(\alpha).$$

Отсюда следует, что  $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in \Psi_z(\alpha)$ , т. е.  $\Psi_z(\alpha)$  не является функцией, что противоречит условию, что  $\Psi_z \in C_{pm}$ .

Докажем обратное утверждение. Пусть  $W_z$  является  $PM$ -множеством, тогда  $\Psi_z(\alpha) = \tau^{-1}\Gamma_{\Phi_z}\tau(\alpha)$  является однозначным множеством для всех функций  $\alpha \in PF$ , а функциональный оператор  $\Psi_z \in C_{pm}$ . Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Для каждого  $z$  определим в.п. множество  $V_z$  с помощью следующего алгоритма перечисления: на шаге  $s$  делаем  $s$  шагов в перечислении всех в.п. множеств  $W_z$ ,  $z \leq s$  и проверяем для каждого  $z$ , являются ли полученные множества  $W_z^s$  однозначными и обладают ли они свойством  $PM$ . Если да, то  $W_z^s$  зачисляем в  $V_z$ . Если нет, то для данного  $z$  множество  $V_z$  остается таким, какое было до шага  $s$  — пустым или конечным  $PM$ -множеством. В силу равномерности пе-

речисления множеств  $V_z$ , существует такая вычислимая функция  $h$ , что  $V_z = W_{h(z)}$  для всех  $z$ . Из построения следует, что  $W_{h(z)}$  —  $PM$ -множество, а если  $W_z$  —  $PM$ -множество, то  $W_z = W_{h(z)}$  для каждого  $z$ . Следовательно, функция  $h$  удовлетворяет условию теоремы.

**Теорема 2.**  $C_{pm}$  обладает универсальным оператором  $\Xi$ , причем таким, что  $\Xi \in C_{pm}$ .

*Доказательство.* Пусть  $h$  — функция, построенная в доказательстве теоремы 1. Определим ч.в. оператор  $\Xi$ , полагая

$$\Xi(\alpha)(\langle x, n \rangle) = \Psi_{h(n)}(\alpha)(x).$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что  $\Xi \in C_{pm}$ . Кроме того,  $\Xi$  является универсальным для множества в. операторов  $C_{pm}$ . В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} (\forall \alpha \in PF)(\forall n \in \omega)[\Psi_n \in C_{pm} \Rightarrow [\Xi/n(\alpha)(x) = \Xi(\alpha)(\langle x, n \rangle) = \\ = \Psi_{h(n)}(\alpha)(x) = \Psi_n(\alpha)(x)]]]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $C_{pm} = \{\Xi/n : n \in \omega\}$ .

**Предложение 7.** Пусть  $\Xi_1, \Xi_2 \in C_{pm}$  — универсальные в. операторы для  $C_{pm}$ , тогда  $\Xi_1(\alpha) \equiv_{c_{pm}} \Xi_2(\alpha)$  для любой функции  $\alpha \in PF$ .

*Доказательство.* Так как  $\Xi_1 \in C_{pm}$  и  $\Xi_2$  — универсальный для  $C_{pm}$ , то  $\Xi_1 = \Xi_2/n_1$  для некоторого  $n_1$ . Это означает, что для любой функции  $\alpha \in PF$  и любого  $x \in \text{dom}(\Xi_1(\alpha))$  выполнено

$$\Xi_1(\alpha)(x) = \Xi_2/n_1(\alpha)(x) = \Xi_2(\alpha)(\langle x, n_1 \rangle) = \Psi_{h(n_1)}(\Xi_2(\alpha))(x),$$

где  $h(n)$  — вычислимая функция, существование которой доказано в теореме 1. Так как  $\Psi_{h(n_1)} \in C_{pm}$ , то по определению 5  $\Xi_1(\alpha) \leq_{c_{pm}} \Xi_2(\alpha)$ .

Сводимость  $\Xi_2(\alpha) \leq_{c_{pm}} \Xi_1(\alpha)$  доказывается аналогично.

Зафиксируем какой-либо универсальный в. оператор  $\Xi \in C_{pm}$  для  $C_{pm}$ .

**Определение 8.**  $pm$ -цилиндрификацией функции  $\alpha \in PF$  называется функция  $\alpha^{pm} = \Xi(\alpha)$ . Функция  $\beta \in PF$  называется  $pm$ -цилиндром, если  $\beta \equiv_{c_{pm}} \Xi(\alpha)$  для некоторой  $\alpha \in PF$ .

Из предложения 7 следует, что определение  $pm$ -цилиндра не зависит от выбора универсального оператора.

**Теорема 3.** Для любых  $\alpha, \beta \in PF$

- (i)  $\alpha \leq_{c_{pm}} \alpha^{pm}$ ;
- (ii)  $\alpha^{pm} \leq_{pm} \alpha$ ;
- (iii)  $\beta \leq_{pm} \alpha \Leftrightarrow \beta \leq_{c_{pm}} \alpha^{pm}$ ;
- (iv)  $(\alpha - pm\text{-цилиндр}) \Leftrightarrow (\forall \gamma)[\gamma \leq_{pm} \alpha \Rightarrow \gamma \leq_{c_{pm}} \alpha]$ ;
- (v)  $\alpha \leq_{pm} \beta \Leftrightarrow \alpha^{pm} \leq_{c_{pm}} \beta^{pm}$ ;
- (vi)  $\alpha \equiv_{pm} \beta \Leftrightarrow \alpha^{pm} \equiv_{c_{pm}} \beta^{pm}$ .

*Доказательство.*

(i) Пусть  $\Upsilon$  — тождественный оператор, т. е.  $\Upsilon(\alpha) = \alpha$  для всех  $\alpha \in PF$ . Ясно, что  $\Upsilon \in C_{pm}$ , поэтому  $\Upsilon = \Xi/n_0$  для некоторого  $n_0$ . Обозначим через  $g(x) = \langle x, n_0 \rangle$ , тогда для всех  $x \in \text{dom}(\alpha)$  имеем

$$\alpha(x) = \Upsilon(\alpha)(x) = \Xi/n_0(\alpha)(x) = \Xi(\alpha)(\langle x, n_0 \rangle) = \Xi(\alpha)(g(x)).$$

Это означает, что  $\alpha \leq_{c_{pm}} \Xi(\alpha) = \alpha^{pm}$ .

(ii) Так как  $\alpha^{pm} = \Xi(\alpha)$  и  $\Xi \in C_{pm}$ , то  $\alpha^{pm} \leq_{pm} \alpha$ .

(iii) Так как  $\beta \leq_{pm} \alpha$ , то  $\beta = \Psi(\alpha)$  для некоторого  $\Psi \in PC_{pm}$ . Пусть  $\Psi = \Xi/n_1$  для некоторого  $n_1$  и  $g(x) = \langle x, n_1 \rangle$ , тогда

$$\beta(x) = \Psi(\alpha)(x) = \Xi/n_1(\alpha)(x) = \Xi(\alpha)(\langle x, n_1 \rangle) = \Xi(\alpha)(g(x)).$$

Это означает, что  $\beta \leq_{cpm} \Xi(\alpha) = \alpha^{pm}$ .

(iv)  $(\alpha - \text{pm-цилиндр}) \Leftrightarrow \alpha \equiv_{cpm} \Xi(\beta)$  для некоторой  $\beta \in PF$ . Поэтому из (iii) следует, что

$$(\forall \gamma)[\gamma \leq_{pm} \alpha \Rightarrow \gamma \leq_{cpm} \alpha].$$

(v) Имеем из (ii), что  $\alpha \leq_{pm} \beta$ , тогда из (iii)  $\alpha^{pm} \leq_{cpm} \beta^{pm}$ .

(vi) Следует из (v).

Следующая теорема позволяет, в частности, утверждать, что если  $|TL_{pm}(\leq \mathbf{a})| \geq 2$ , то функциональная pm-степень  $\mathbf{a} = deg_{pm}(\alpha)$  разложима.

**Теорема 4.** Для любой pm-степени  $\mathbf{a} = deg_{pm}(\alpha)$  верхняя полурешетка  $TL_{pm}(\leq \mathbf{a})$  изоморфно вложима в  $L_{pm}^{cpm}(\mathbf{a})$ .

*Доказательство.* Если  $\alpha$  — ч.в. функция, то

$$|TL_{pm}(\leq \mathbf{a})| = |L_{pm}^{ce}(\mathbf{a})| = 1$$

и утверждение теоремы выполнено тривиально.

Пусть теперь  $\alpha$  не является ч.в. функцией и  $deg_{pm}(f) \in TL_e(\leq \mathbf{a})$ . Определим функцию  $\beta^f(\langle x, y \rangle) = f(x)$ , если  $y \in graph(\alpha)$ , и  $\beta^f(\langle x, y \rangle) \uparrow$  в противном случае. Ясно, что  $\beta^f \leq_{pm} \alpha$ . С другой стороны,

$$(\forall y)[y \in graph(\alpha) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists z)[\langle x, y \rangle, z \in graph(\beta^f)],$$

поэтому  $\alpha \leq_{pm} \beta^f$ . Итак, если  $deg_{pm}(f) \in TL_{pm}(\leq \mathbf{a})$ , то  $\alpha \equiv_{pm} \beta^f$  и  $deg_{ce}(\beta^f) \in L_{pm}^{cpm}(\mathbf{a})$ .

Определим отображение

$$\epsilon: TL_{pm}(\leq \mathbf{a}) \rightarrow L_{pm}^{ce}(\mathbf{a}), \text{ где } \epsilon(deg_{pm}(f)) = deg_{ce}(\beta^f).$$

Пусть  $f \leq_{pm} g$ , в силу предложения 4 в этом случае  $f \leq_{cpm} g$ . Пусть  $\Phi_n$  — е-оператор, определяющий pm-оператор и такой, что  $graph(f) = \Phi_n(graph(g))$ . Пусть  $z_0$  — произвольный фиксированный элемент из  $graph(\alpha)$ . Определим два е-оператора  $\Upsilon'$  и  $\Upsilon''$ . При входе  $\langle \langle x, z_0 \rangle, u \rangle$  оператор  $\Upsilon'$  дает выход  $\langle x, u \rangle$ , при входе  $\langle \langle x, z \rangle, u \rangle$  при  $z \neq z_0$  оператор  $\Upsilon'$  не дает никакого выхода. Ясно, что  $\Upsilon'(A) \in SV$  для любого однозначного множества  $A$ , т. е.  $\Upsilon'$  определяет в. оператор. В частности, так как  $graph(\beta^g) = \{\langle \langle x, y \rangle, g(x) \rangle : y \in graph(\alpha)\}$ , то

$$\Upsilon'(graph(\beta^g)) = \{\langle x, g(x) \rangle : x \in \omega\} = graph(g).$$

Заметим, что, так как е-операторы  $\Phi_n$  и  $\Upsilon'$  определяют в. операторы, то их композиция  $\Phi_n * \Upsilon'$  также определяет в. оператор. При этом

$$\Phi_n * \Upsilon'(graph(\beta^g)) = \Phi_n(graph(g)) = graph(f).$$

Работу е-оператора  $\Upsilon''$  определяет следующая инструкция: на входе  $\langle \langle x, y \rangle, u \rangle$  оператор дает выход  $y$ . Ясно, что  $\Upsilon''(graph(\beta^g)) = graph(\alpha)$ .

Теперь опишем работу е-оператора  $\Phi_m$ : элементы произвольного множества  $A$  одновременно подаем на входы операторов  $\Phi_n * \Upsilon'$  и  $\Upsilon''$ , число  $\langle \langle x, y \rangle, u \rangle$  является выходом оператора  $\Phi_m$ , если  $y \in \Upsilon''(A)$  и  $\langle x, u \rangle \in$

$\Phi_n * \Upsilon'(A)$ . Ясно, что если  $\Phi_n * \Upsilon'(A) \in SV$ , то  $\Phi_m(A) \in SV$ , следовательно,  $\Phi_m$  определяет в. оператор. Непосредственно видно, что

$$\Phi_m(\text{graph}(\beta^g)) = \{\langle x, y \rangle, f(x) : y \in \text{graph}(\alpha)\} = \text{graph}(\beta^f).$$

Следовательно,  $\beta^f \leq_{cpm} \beta^g$ .

Обратно, пусть  $\beta^f \leq_{cpm} \beta^g$  для некоторого в. оператора  $\Psi$ . Пусть  $h(\langle x, y \rangle) = g(x)$ . Ясно, что  $h \equiv_{pm} g$ . Пусть  $\eta = \Psi(h)$ . Так как  $\beta^g \subset h$ , то  $\beta^g \subset \eta$ . Пусть  $z_0$  — произвольный фиксированный элемент из  $\text{graph}(\alpha)$ , тогда  $\{\langle x, z_0 \rangle, f(x) : x \in \omega\} \subset \text{graph}(\eta)$ . Отсюда следует, что

$$\text{graph}(f) = \{\langle x, y \rangle : \langle x, z_0 \rangle, y \in \text{graph}(\eta)\}.$$

Это означает, что  $f \leq_{pm} \eta$ , а так как  $\eta \leq_{pm} h$  и  $h \equiv_{pm} g$ , то  $f \leq_{cpm} g$ .

Итак, доказано, что  $f \leq_{pm} g \Leftrightarrow \beta^f \leq_{ce} \beta^g$ . Отсюда следует, что

$$\text{deg}_{pm}(f) \neq \text{deg}_{pm}(g) \Rightarrow \epsilon(\text{deg}_{pm}(f)) \neq \epsilon(\text{deg}_{pm}(g)),$$

следовательно,  $\epsilon: TL_{pm}(\leq \mathbf{a}) \rightarrow L_{pm}^{cpm}(\mathbf{a})$  — изоморфное вложение. Теорема доказана.

Если  $|TL_e(\leq \mathbf{a})| = 1$ , то частичные степени  $\mathbf{a} = \text{deg}_e(\alpha)$  могут быть как разложимыми, так и неразложимыми.

#### Библиографический список

1. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М. : Наука, 1977. 415 с.
2. Поляков Е. А., Розинас М. Г. Сводимости по перечислимости // Сибирский математический журнал. 1977. Т. 18, № 4. С. 838—845.
3. Rogers H. (Jr.) Theory of Recursive Functions and Effective Computability. New York : McGraw-Hill, 1967. 482 p.

УДК 519.67

С. И. Хашин

## ОПТИМИЗАЦИЯ БАЗИСА ФУРЬЕ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

В компьютерной графике широко применяется двумерное дискретное косинус-преобразование Фурье в квадрате  $8 \times 8$ . Его можно рассматривать как переход к новому ортонормальному базису в пространстве размерности 64. В статье находится новый ортонормальный базис, максимально эффективный в описанном в работе смысле.

**Ключевые слова:** jpeg, преобразование Фурье, ортогональная матрица, квадратичная форма.

In computer graphics, it is widely used two-dimensional discrete cosine-Fourier transform in the square  $8 \times 8$ . It can be regarded as a transition to a new orthonormal basis in the space of dimension 64. The article is a new orthonormal basis, the most effective in the sense described in.

**Key words:** jpeg, Fourier transformation, orthogonal matrix, square form.

© Хашин С. И., 2016

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, грант № 01201456563 «Теоретико-числовые и численные методы разработки и оптимизации алгоритмов информационной безопасности».

### 1. Базис Фурье

В компьютерной графике один из наиболее популярных форматов — jpeg [1, 3, 5]. В нем, после некоторых преобразований, изображение разбивается на квадраты размером  $8 \times 8$  точек. Таким образом, получаем матрицы размера  $8 \times 8$ , состоящие из целых чисел отрезка  $[0 \dots 255]$ . К каждой такой матрице  $f(x, y)$  применяется двумерное дискретное косинус-преобразование Фурье. Получающиеся значения  $F(u, v)$  находятся по формуле

$$F(u, v) = \frac{1}{4}C(u)C(v) \sum_{x,y=0}^7 f(x, y) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right), \quad (1)$$

где  $C(u) = 1/\sqrt{2}$  при  $u = 0$  и  $C(u) = 1$  в остальных случаях.

Это преобразование можно рассматривать как переход от стандартного базиса  $E$ , у которого ровно одна координата равна 1, а все остальные — нулю, к новому ортонормальному базису  $F$ . Векторы из этого базиса нумеруются двумя индексами  $(u, v)$ , координаты каждого вектора нумеруются опять двумя индексами  $(x, y)$  и, согласно формуле (1), эти координаты равны

$$F_{u,v}[x, y] = \frac{1}{4}C(u)C(v) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right).$$

Возьмем для примера один такой квадрат из стандартного изображения `lena.bmp`:

$$\begin{pmatrix} 95 & 94 & 91 & 107 & 100 & 97 & 98 & 101 \\ 95 & 96 & 104 & 113 & 99 & 99 & 101 & 98 \\ 100 & 101 & 98 & 105 & 97 & 95 & 102 & 95 \\ 93 & 95 & 95 & 92 & 97 & 96 & 91 & 98 \\ 88 & 93 & 100 & 96 & 97 & 96 & 103 & 101 \\ 95 & 97 & 93 & 92 & 99 & 102 & 105 & 113 \\ 96 & 96 & 95 & 95 & 96 & 98 & 105 & 102 \\ 95 & 94 & 95 & 99 & 99 & 97 & 98 & 103 \end{pmatrix}.$$

Результатом его преобразования Фурье (округленного до целых) будет матрица

$$\begin{pmatrix} 784 & -15 & -1 & -7 & 4 & 3 & -4 & -2 \\ 3 & 9 & -11 & -2 & 4 & 6 & -3 & -5 \\ 5 & 0 & -4 & 1 & 7 & 5 & -2 & -5 \\ 2 & -12 & 4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -10 & -1 & -3 & 0 & 3 & -4 & 3 & 1 \\ -6 & 2 & 6 & 6 & 1 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 & 3 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & -3 & 6 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Преобразование Фурье является ортогональным, поэтому длина исходного вектора в точности равна длине преобразованного (до округления).

В представленном примере, как и во множестве других, можно заметить, что в исходной матрице  $8 \times 8$  все числа не слишком сильно отличаются друг от друга, а в преобразованной наибольшее значение имеет число в верхней левой клетке и по мере удаления от этой клетки числа быст-



ро убывают по модулю. То есть значительная часть информации оказывается сосредоточена в верхнем левом углу матрицы и соответствующие элементы матрицы являются наиболее ценными в информационном смысле.

Именно это свойство и выступает основой для эффективного сжатия графической информации.

В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли найти другой ортонормальный базис с еще более эффективным разделением информации по координатам?

Оказывается, можно. Но базис Фурье весьма близок к оптимальному, и, как следствие, переход от базиса Фурье к наиболее оптимальному даст очень слабую прибавку коэффициента сжатия и не может быть оправдан.

Другие стандарты сжатия (см., напр.: [2, 4, 6]) достигают несколько лучшего сжатия, чем jpeg, но за счет совершенно иных подходов, которые в настоящей статье не рассматриваются.

## 2. Эффективность базиса относительно системы векторов

Пусть в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  задан набор из  $K$  векторов  $X = \{x_1, \dots, x_K\}$  и  $E = \{e_i\}$  — ортонормальный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть  $x_j = y_{j1}e_1 + \dots + y_{jn}e_n$  — разложение каждого из векторов по базису  $E$ . Мы хотим найти такой базис, чтобы первые координаты в разложении были как можно больше (по модулю), а последующие — как можно меньше.

Для данного базиса  $E$  и набора векторов  $V$  введем характеристики

$$S_i = \sum_{j=1}^K a_{ji}^2, \quad S = \sum_{i=1}^n S_i, \quad s_i = \frac{S_i}{S}.$$

По построению,  $0 \leq s_i \leq 1$ ,  $s_1 + \dots + s_n = 1$ .

Будем говорить, что для набора векторов  $X$  базис  $E_1$  лучше, чем  $E_2$ , если строчка  $(s_1, \dots, s_n)$  для первого базиса лексикографически больше соответствующей строчки для второго.

Базис  $E$  будем называть оптимальным для набора векторов  $V$ , если  $E$  не хуже любого другого базиса.

Для вектора  $v$  через  $v^2$  обозначим квадратичную форму (квадрат проекции на вектор  $v$ )

$$x \rightarrow (x, v)^2.$$

Для набора векторов  $V = \{v_i\}$  рассмотрим квадратичную форму  $f_V = \sum v_i^2$ . Эта квадратичная форма будет неотрицательно определена. Имеет место следующий очевидный факт.

**Теорема.** В оптимальном базисе для набора векторов  $V$  квадратичная форма  $f_V$  диагональна и диагональные элементы не возрастают.

Таким образом, для нахождения оптимального базиса для набора векторов  $V$  надо построить квадратичную форму  $f_V$  и привести ее к главным осям.

## 3. Полученные результаты

Для измерений был взят набор из 100 высококачественных изображений. Для этого отбирались фотографии, полученные с наибольшим ка-

чеством (jpeg — 100 %), которые затем сжимались в три раза по каждому измерению, т. е. в новом изображении яркость каждой точки равна среднему арифметическому яркостей 9 соседних точек исходного изображения. Качество изображений, полученных таким образом, можно считать близким к идеальному.

Каждое изображение разрезалось на квадраты  $8 \times 8$ , каждая из трех цветовых компонент рассматривалась как вектор  $v$  в 64-мерном пространстве, находилась квадратичная форма  $v^2$ , затем все эти квадратичные формы складывались.

Полученная симметричная матрица размера  $64 \times 64$  приводилась ортогональным преобразованием к главным осям. Найденные таким путем оси как раз и образовывали искомый ортонормальный базис.

**Базис в 16-мерном пространстве.** Трудно наглядно представить ортонормальный базис в 64-мерном пространстве. Поэтому возьмем вместо квадратов размера  $8 \times 8$  квадраты размера  $4 \times 4$ , для них найденный оптимальный базис будет уже более наглядным. В строках следующей матрицы показаны координаты оптимального ортонормального базиса, умноженные на 100 и округленные до целых:

25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
31	35	34	29	15	16	15	12	-12	-15	-16	-15	-29	-34	-35	-31
-28	-12	14	31	-34	-15	16	35	-35	-16	15	34	-31	-15	12	29
-33	-13	-11	-29	5	37	38	7	7	37	37	5	-29	-11	-13	-33
-9	32	34	-6	-36	9	10	-34	-34	10	9	-36	-6	34	32	-9
37	21	-19	-42	19	13	-8	-22	-21	-8	13	19	-41	-19	21	38
-18	28	-26	14	-13	38	-35	13	-13	35	-37	13	-15	26	-28	17
18	13	10	17	-27	-37	-38	-24	24	38	37	27	-17	-10	-13	-19
-40	-8	32	19	19	13	-8	-37	37	8	-13	-19	-18	-31	8	40
16	-35	-22	41	31	-4	-16	9	-9	16	5	-31	-42	22	35	-16
-40	36	4	-8	26	1	-33	14	14	-34	1	26	-8	4	36	-40
-8	-9	-16	37	16	34	-14	-40	-41	-14	34	16	37	-16	-9	-8
-3	-30	45	-15	36	-13	0	-21	-21	0	-13	36	-15	45	-30	-3
25	-37	21	-6	-31	38	-10	-5	5	9	-38	31	6	-21	37	-26
-6	-5	30	-25	22	-9	-38	37	-37	38	8	-21	25	-31	5	6
11	-21	21	-11	-21	38	-39	21	21	-38	39	-21	-11	21	-21	12

Даже из этой матрицы видно, что «физический смысл» найденного базиса весьма близок к «физическому смыслу» базиса Фурье.

**Эффективность базиса.** Возвращаясь к квадратам размера  $8 \times 8$ , покажем эффективность найденного базиса в сравнении с базисом Фурье. Эффективностью базиса в данном случае будет строка из 64 чисел.

Эффективность оптимального базиса:

0.9811571	0.0033704	0.0037226	0.0011993	0.0009864	0.0013201	0.0005756	0.0005036
0.0005295	0.0006356	0.0003289	0.0002832	0.0003186	0.0003041	0.0003522	0.0002142
0.0001784	0.0001998	0.0002048	0.0001893	0.0002201	0.0001580	0.0001217	0.0001326
0.0001414	0.0001370	0.0001270	0.0001499	0.0001524	0.0000891	0.0000944	0.0000994
0.0001003	0.0000961	0.0000896	0.0001247	0.0000723	0.0000709	0.0000732	0.0000743
0.0000738	0.0000710	0.0000723	0.0000574	0.0000562	0.0000564	0.0000567	0.0000557
0.0000573	0.0000468	0.0000443	0.0000444	0.0000440	0.0000471	0.0000375	0.0000358
0.0000356	0.0000382	0.0000311	0.0000298	0.0000312	0.0000264	0.0000263	0.0000266.

## Эффективность базиса Фурье:

0.9811604	0.0037498	0.0033980	0.0013685	0.0011750	0.0010074	0.0006373	0.0005782
0.0005188	0.0004943	0.0003564	0.0003314	0.0003044	0.0002995	0.0002799	0.0002219
0.0002169	0.0001960	0.0001905	0.0001879	0.0001786	0.0001595	0.0001521	0.0001514
0.0001346	0.0001314	0.0001279	0.0001272	0.0001258	0.0001221	0.0000963	0.0000942
0.0000928	0.0000920	0.0000905	0.0000900	0.0000736	0.0000734	0.0000716	0.0000704
0.0000701	0.0000696	0.0000692	0.0000571	0.0000569	0.0000550	0.0000542	0.0000539
0.0000536	0.0000463	0.0000459	0.0000432	0.0000426	0.0000422	0.0000374	0.0000367
0.0000348	0.0000344	0.0000312	0.0000301	0.0000292	0.0000265	0.0000262	0.0000258.

Учитывая, что в jpeg-файлах результаты преобразования Фурье выводятся «змейкой» [1, 3], для большей наглядности сгруппируем полученные результаты по расстоянию клетки в матрице  $8 \times 8$  от верхнего левого угла:

Строки	Оптимальный базис	Базис Фурье
0	0.981157	0.981160
1 – 2	0.007093	0.007148
3 – 5	0.003506	0.003551
6 – 9	0.002244	0.002229
10 – 14	0.001587	0.001572
15 – 20	0.001207	0.001192
21 – 27	0.000968	0.000984
28 – 35	0.000846	0.000804
36 – 42	0.000508	0.000498
43 – 48	0.000340	0.000331
49 – 53	0.000227	0.000220
54 – 57	0.000147	0.000143
58 – 60	0.000092	0.000091
61 – 62	0.000053	0.000053
63	0.000027	0.000026

Мы видим, что эффективность оптимального базиса практически не отличается от эффективности базиса Фурье. Поэтому, по крайней мере с точки зрения сжатия графических данных, базис Фурье следует признать наиболее подходящим из всех ортонормальных базисов.

**Библиографический список**

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М. : Техносфера, 2012. 1104 с.
2. Методы компьютерной обработки изображений / под ред. В. А. Соифера. 2-е изд., испр. М. : Физматлит, 2003. 784 с.
3. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео / Д. Ватолин и др. М. : Диалог-МИФИ, 2002. 384 с.
4. Jpeg2000 : сайт. URL: <http://www.jpeg.org/jpeg2000/index.html> (дата обращения: 20.01.2015).
5. The JPEG still picture compression standard // IEEE Transactions on Consumer Electronics. 1992. Vol. 38, iss. 1. P. XVIII—XXXIV.
6. Weinberger M. J., Seroussi G., Sapiro G. The LOCO-I lossless image compression algorithm: principles and standardization into JPEG-LS // IEEE Transactions on Image Processing. 2000. Vol. 9, № 8. P. 1309—1327.

## Сведения об авторах

---

- АЛЬДЖАБАЛИ**  
**Адиб М. М.** аспирант кафедры общей биологии и физиологии,  
Ивановский государственный университет.  
ADIB.ALJABALI@bk.ru
- БАРИНОВА**  
**Марина Олеговна** кандидат биологических наук, доцент кафедры  
общей биологии и физиологии,  
Ивановский государственный университет.  
payka@list.ru
- БОРИСОВА**  
**Елена Анатольевна** доктор биологических наук, заведующая  
кафедрой общей биологии и физиологии,  
Ивановский государственный университет.  
flogaea@mail.ru
- БОРИСОВА**  
**Ирина Николаевна** директор ботанического сада,  
Ивановский государственный университет.  
i371159@mail.ru
- ЗАРИПОВ**  
**Владимир Николаевич** кандидат биологических наук,  
доцент кафедры общей биологии и физиологии,  
Ивановский государственный университет.  
zaripow@mail.ru
- ИСАЕВ**  
**Владимир Анатольевич** доктор биологических наук, профессор  
кафедры общей биологии и физиологии,  
Ивановский государственный университет.  
viam\_e@mail.ru
- КАЛМЫКОВ**  
**Павел Алексеевич** аспирант кафедры органической и физической  
химии, Ивановский государственный университет.  
k\_p.a@mail.ru
- КЛЮЕВ**  
**Михаил Васильевич** доктор химических наук, профессор кафедры  
органической и физической химии,  
Ивановский государственный университет.  
klyuev@inbox.ru
- КОРМИЛИЦЫНА**  
**Наталья Кирилловна** кандидат биологических наук, доцент  
кафедры безопасности жизнедеятельности  
и общемедицинских знаний,  
Ивановский государственный университет.  
kormilica@gmail.com
- КОРОЛЕВА**  
**Светлана Валерьевна** доктор медицинских наук, профессор кафедры  
гражданской защиты и управления в ЧС,  
Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС  
МЧС России.  
doctorqween@mail.ru
- КРЫЛОВ**  
**Евгений Николаевич** доктор химических наук, профессор  
кафедры органической и физической химии,  
Ивановский государственный университет.  
enk2000S@yandex.ru

**КУРЮЧКИН Виктор Анатольевич** кандидат медицинских наук, доцент кафедры общей биологии и физиологии, Ивановский государственный университет. (4932) 42-36-91

**КУСКОВСКИЙ Леонид Наумович** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономического анализа и бухгалтерского учета, Ивановский государственный университет. ya.kyln@yandex.ru

**ЛОГИНОВ Давид Евгеньевич** студент магистратуры факультета математики и компьютерных наук, Ивановский государственный университет. arluavir@gmail.com

**ЛОГИНОВ Евгений Константинович** доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии, Ивановский государственный университет. ek.loginov@mail.ru

**ЛОГИНОВА Марина Валерьевна** студентка 1-го курса магистратуры биолого-химического факультета, Ивановский государственный университет. marinamilagros@yandex.ru

**МИНЕЕВА Лариса Юрьевна** кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой ботаники и зоологии, Ивановский государственный университет. lmin1@mail.ru

**МОЛДАВАНСКИЙ Давид Ионович** доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики, Ивановский государственный университет. moldav@mail.ru

**ПЕЛЕВИНА Ксения Сергеевна** студентка бакалавриата факультета математики и компьютерных наук, Ивановский государственный университет. ksenya\_sweet93@mail.ru

**РУДАКОВА Екатерина Вячеславовна** студентка магистратуры биолого-химического факультета, Ивановский государственный университет. SmEkaterina13@gmail.com

**СОКОЛОВ Евгений Викторович** кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерных наук, Ивановский государственный университет. ev-sokolov@yandex.ru

**СОЛОН Борис Яковлевич** доктор физико-математических наук, профессор, декан факультета математики и компьютерных наук, заведующий кафедрой алгебры и математической логики, Ивановский государственный университет. bysolon@gmail.ru

- ФОМИНА** ведущий инженер ботанического сада,  
**Ольга Евгеньевна** Ивановский государственный университет.  
skvortsova.2010@mail.ru
- ХАШИН** кандидат физико-математических наук,  
**Сергей Иванович** доцент кафедры прикладной математики  
и компьютерных наук,  
Ивановский государственный университет.  
khash2@mail.ru
- ЧЕКАН** ведущий инженер ботанического сада,  
**Ирина Валерьевна** Ивановский государственный университет.  
(4932) 33-64-52
- ШЕРУДИЛЛО** студент магистратуры факультета математики  
**Александр Сергеевич** и компьютерных наук,  
Ивановский государственный университет.  
sheals92@gmail.com

## ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

### «ВЕСТНИКА ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»

---

1. В журнал принимаются материалы в электронном виде на дискете стандартного формата с приложением одного экземпляра распечатки на белой бумаге.

Максимальный размер статьи — 1,0 авт. л. (20 страниц текста через 1,5 интервала, 30 строк на странице формата А4, не более 65 знаков в строке, выполненного в редакторе Microsoft Word шрифтом Times New Roman или Times New Roman Cyr, кегль 14), сообщения — 0,5 авт. л. (10 страниц).

2. Материал для журнала должен быть оформлен в следующей последовательности: **УДК** (для естественных и технических специальностей), **ББК** (в библиографическом отделе библиотеки ИвГУ); на русском и английском языках: **инициалы и фамилия автора, название материала**, для научных статей — **аннотация** (объемом 10—15 строк), **ключевые слова; текст статьи** (сообщения).

3. Библиографические источники должны быть пронумерованы в алфавитном порядке, ссылки даются в тексте статьи в скобках в строгом соответствии с пристатейным списком литературы. Библиографическое описание литературных источников к статье оформляется в соответствии с ГОСТами 7.1—2003, 7.0.5—2008. В каждом пункте библиографического списка, составленного в алфавитном порядке (сначала произведения на русском языке, затем на иностранном), приводится одна работа. В выходных сведениях обязательно указание издательства и количества страниц, в ссылке на электронный ресурс — даты обращения.

4. Фотографии, прилагаемые к статье, должны быть черно-белыми, контрастными, рисунки — четкими.

5. В конце представленных материалов следует указать полный почтовый адрес автора, его телефон, фамилию, имя, отчество, ученую степень, звание, должность. Материал должен быть подписан всеми авторами.

6. Направление в редакцию ранее опубликованных и принятых к печати в других изданиях работ не допускается.

7. Редакция оставляет за собой право осуществлять литературную правку, корректирование и сокращение текстов статей.

8. Рукописи аспирантов публикуются бесплатно.

### ПРАВИЛА РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ СТАТЕЙ

1. Статьи авторов, являющихся преподавателями, сотрудниками или обучающимися ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании письменного решения (рекомендации) кафедры или научного подразделения ИвГУ и рецензии доктора наук, не являющегося научным руководителем (консультантом), руководителем или сотрудником кафедры или подразделения, где работает автор.

2. Статьи авторов, не работающих и не обучающихся в ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании рекомендации их вуза или научного учреждения и рецензии доктора наук, работающего в ИвГУ.

3. Поступившие статьи проходят далее рецензирование одного из членов редколлегии соответствующей серии (выпуска), являющегося специалистом в данной области.

4. Статья принимается к публикации при наличии двух положительных рецензий и положительного решения редколлегии серии (выпуска). Порядок и очередность публикации статьи определяются в зависимости от объема публикуемых материалов и тематики выпуска.

5. В случае отклонения статьи автору направляется аргументированный отказ в письменной (электронной) форме. Авторы имеют право на доработку статьи или ее замену другим материалом.

**ВЕСТНИК  
ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Серия «Естественные, общественные науки»  
2016. Вып. 2. Биология. Химия. Физика. Математика**

Директор издательства *Л. В. Михеева*  
Редакторы *О. В. Батова, О. В. Боронина, В. А. Киселева*  
Технический редактор *И. С. Сибирева*  
Компьютерная верстка *Т. Б. Земсковой*

Дата выхода в свет 30.09.2016 г.  
Формат  $70 \times 108^{1/16}$ . Бумага писчая. Печать плоская.  
Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 300 экз. Заказ № 204.

Издательство «Ивановский государственный университет»  
✉ 153025 Иваново, ул. Ермака, 39  
☎ (4932) 93-43-41. E-mail: [publisher@ivanovo.ac.ru](mailto:publisher@ivanovo.ac.ru)



