



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра фундаментальной математики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

\_\_\_\_\_  
(подпись) Ю.А. Хашина

«\_1\_» сентября\_2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Дифференциальная геометрия и топология**

Уровень высшего образования:	бакалавриат
Квалификация выпускника:	бакалавр
Направление подготовки:	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математика, алгоритмы и анализ данных



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

### 1. Цели освоения дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология»:

Основными целями изучения раздела «Дифференциальная геометрия» являются:

- используя векторную алгебру и анализ, методы локализации математического анализа (формула Тейлора, теорема о неявной функции) сводить с линией или поверхностью сопровождающий трехгранник или касательную плоскость и нормаль и с их помощью выделить основные числовые характеристики (кривизны) и дать классификацию точек поверхности;
- выяснить роль этих кривизн в восстановлении линий и поверхностей (теоремы о натуральных уравнениях);
- выявить роль первой квадратичной формы поверхности в получении инвариантов изгиба;
- показать роль коэффициентов аффинной связности в реализации параллельного переноса касательных векторов поверхности и определении геодезических линий, что необходимо для понимания современных разделов физики (ОТО Эйнштейна).

Основными целями раздела «Топология» являются:

- дать представление об основных понятиях общей топологии, необходимых при изучении дисциплины «Функциональный анализ», теории графов, и зависимостью этих понятий от выбора топологии (на примерах);
- показать способы задания гладкой структуры на многообразиях и задания дополнительных структур (тензорные поля, интегрирование, аффинная и риманова связности).

### 2. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» включена в базовую часть учебного плана.

Дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» лежит в основе всего математического образования и используется во всех математических дисциплинах, входящих в ОП, в том числе в следующих дисциплинах «Математический анализ», «Аналитическая геометрия», «Дифференциальная геометрия и топология», «Численные методы», «Дискретная математика», «Математическая логика и теория алгоритмов», «Теория чисел», «Дополнительные главы алгебры», «Математические методы в естествознании», «Функциональный анализ», «История, методология и основания математики».

Дисциплина «Дифференциальная геометрия и топология» создаёт базу для научной работы студентов в рамках написания курсовых и квалификационных работ. На этой дисциплине основаны все магистерские курсы геометрического цикла и все дисциплины геометрического цикла для аспирантов, работающих по научной специальности 01.01.04 – Дифференциальная геометрия и топология.

Дисциплина опирается на следующие (параллельно изучаемые) дисциплины учебного плана: «Математический анализ» и «Аналитическая геометрия». Эти дисциплины доставляют материал для примеров и служат сферой ключевых приложений геометрии.

Для успешного изучения дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» необходимы также «входные» знания и умения в области математики, полученные в процессе обучения по программе средней школы, в том числе обучающийся должен

**знать** содержание «школьного курса математики»,

**уметь** решать алгебраические уравнения и неравенства, преобразовывать алгебраические выражения, решать геометрические и тригонометрические задачи,

**владеть** навыками математических рассуждений и доказательств.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

#### **3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина**

Учебным планом при освоении данной дисциплины предусмотрено формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

а) общекультурные (ОК): нет

б) общепрофессиональные (ОПК):

ОПК-1-способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности.

#### **3.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с формируемыми компетенциями**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

##### **1. Знать:**

- способы задания и локального изучения линий и поверхностей в  $E_2$  и  $E_3$ ;
- теории кривизн линий и поверхностей;
- основные инварианты изгиба поверхности;
- основные типы специальных линий на поверхности (асимптотические, кривизн, геодезические);
- способы задания топологии на множестве, классификацию точек относительно подмножества;
- несколько способов определения непрерывного отображения, их связь;
- основные топологические инварианты;
- классические топологические многообразия и гладкие структуры на них;

##### **2. Уметь:**

- строить плоские линии по параметрическим и неявным уравнениям;
- применять формулы Тейлора при построении линий и изучении локального поведения линий и поверхностей в окрестности точки;
- находить уравнения элементов сопровождающего трехгранника линии, касательной плоскости и нормали, вычислять разные кривизны;
- находить уравнения специальных линий на поверхности;
- вычислять коэффициенты аффинной связности и с их помощью реализовывать параллельный перенос касательных векторов поверхности;
- доказывать гомеоморфность или негомеоморфность с помощью топологических инвариантов;

- проверять дифференцируемость атласа на конкретных многообразиях;

##### **3. Владеть:**

- методами исследования локального поведения линий и поверхностей;
- методами проверки отображения на непрерывность;
- методами задания топологий и установления типа топологического пространства

#### **4. Объем и содержание дисциплины**

Объем дисциплины составляет 4 зачетных единиц (144 академических часов).

#### **4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа**

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.

№ п/п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)
			Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Формы промежуточной аттестации
1.	Задачи и методы дифференциальной геометрии.	3	2	2 семинар	
2.	Теория кривых	3	14	14	СР, КР
3	Теория поверхностей	3	10	10	СР, КР
4	Элементы топологии	3	8	6	СР
5	Теория многообразий	3	4	2	СР
Итого за семестр:			36	32	Экзамен
Итого по дисциплине:			36	32	

## 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

### 1. Теория кривых.

Простая дуга. Линия и арифметические способы ее задания (векторно- координатно-параметрическое, явное и неявное в  $E_2$ , неявное в  $E_3$ ). Сопровождающий трехгранник (касательная, соприкасающаяся плоскость, нормали и нормальная плоскость, главная нормаль и бинормаль, спрямляющая плоскость). Векторы сопровождающего трехгранника для линии  $r = r(t)$ . Натуральная параметризация, и ее свойства. Вектор кривизны и кривизна линии. Линии нулевой кривизны. Вычисление кривизны для линии  $r = r(t)$ . Сопровождающий репер Френе  $\{M, t, n, b\}$ . Формулы Френе. Кручение линии. Линии нулевого кручения. Вычисление  $\sigma$  для линии  $r = r(t)$ . Формулы Френе в механике. Строение линии в окрестности обыкновенной точки. Геометрический смысл знака кручения. Натуральные уравнения линии. Теорема о натуральных уравнениях линии в  $E_3$ . Линии постоянных  $K$  и  $\sigma$ . Плоские линии. Относительная кривизна. Теорема о натуральных уравнениях плоской линии. Эволюта и эвольвента плоской линии. Центр и радиус кривизны, огибающая однопараметрического семейства плоских линий.

### 2. Теория поверхностей.

Определение элементарной поверхности. Арифметические способы задания поверхности (векторное уравнение  $r = r(u_1, u_2)$ , явное уравнение  $z = f(x, y)$ , неявное уравнение  $F(x, y, z) = 0$ ). Касательная плоскость и нормаль поверхности. I квадратичная форма, ее вычисление и применение к вычислению длины дуги, площади, величины угла на параметризованной поверхности. II квадратичная форма. Нормальная кривизна линии на поверхности. Нормальная кривизна как функция касательного направления  $k_n = k_n(t)$ . Связь  $k_n$  с кривизной нормального сечения. Асимптотические линии. Изменение  $K_n$  при изменении  $t$ , индикатриса Дюпена. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Классификация точек поверхности. Строение поверхности в окрестности обыкновенной точки.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

Геометрический смысл индикатрисы Дюпена. Полная (гауссова)  $K$  и средняя  $H$  кривизны поверхности. Вычисление  $k_1, k_2, H, K$ . Нахождение главных направлений. Линии кривизны. Локальная и глобальная изометрии (наложимость, изгибание). Инварианты локальной изометрии. Огибающая однопараметрического семейства плоскостей. Развертывающиеся поверхности, их локальные типы (цилиндрическая, коническая, поверхность касательных). Линейчатые поверхности, их типы. Геликоид. Наложимость линейчатых поверхностей на плоскость. Поверхности вращения, их I квадратичная форма. Псевдосфера. Катеноид. Дифференциальные уравнения оснащенной поверхности. Коэффициенты связности  $\Gamma_{ij}^k$ . Инвариантность гауссовой кривизны. Геодезическая кривизна и геодезические линии. Формула Гаусса-Бонне и следствия из нее.

### 3. Элементы топологии

Определение и примеры топологических пространств  $T$ . Метрическая топология. Способы задания топологий: предбаза, база, индуцированная топология, прямое произведение  $T$ , фактортопология. Классификация точек относительно подмножеств в  $T$ . Предел последовательности в  $T$ . Аксиомы отделимости. Хаусдорфовость. Компактность. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. Топологические инварианты. Гомотопия.

### 4. Многообразия

Топологические и дифференцируемые многообразия. Примеры. Касательное векторное пространство. Задание структур на дифференцируемом многообразии (тензорные поля, аффинная и риманова связности). СТО, ОТО, уравнение Эйнштейна. Проблема вложения многообразий.

### 5. Образовательные технологии

Технология проблемного обучения – демонстрация на лекциях и практических занятиях проблемных ситуаций. Проблемы учебного характера как правило формулируются в виде задач и решаются студентами самостоятельно и на практических занятиях под руководством и при поддержке преподавателя. Решение каждой задачи – это не только формулы; оно должно иметь четкую логическую структуру, содержать необходимые доказательства, пояснения, комментарии, ссылки на теоретические факты.

Информационные технологии: технологии смешанного обучения, использование компьютерных презентаций, обеспечение студентов текстами лекций в электронной форме.

### 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов состоит в следующем: еженедельная работа с рукописными и электронными конспектами лекций (материалы выдаются студентам по мере необходимости), изучение литературы указанной в разделе 8 рабочей программы, выполнение домашних заданий (задания выдаются на каждом практическом занятии, и, при необходимости, в системе электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanoovo.ac.ru>), подготовка к решению задач, предлагаемых на экзамене (разработаны комплекты типовых задач), подготовка к экзаменам (вопросы и другие материалы для сдачи экзаменов доступны каждому студенту как в бумажном виде (в ауд. 326 первого уч. корпуса) так и в системе «Мой университет»). Методические пособия по данному курсу находятся в библиотечных фондах ИвГУ, их выходные данные представлены в **приложениях** к рабочей программе. Там же представлены и другие методические материалы по данной дисциплине.



## **7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Итоговой формой контроля является устный экзамен, который проводится 1 раз – по результатам семестра. Экзаменационный билет содержит 1 теоретический и тест.

### **Критерии и шкала оценки ответа на экзаменационный вопрос.**

Если студент демонстрирует знание основных понятий и классических результатов алгебры, входящих в программу экзамена, то оценка должна быть положительной.

Если наряду с перечисленным выше студент осмысленно воспроизводит доказательства математических теорем, четко и аккуратно формулирует математические высказывания, демонстрирует глубокие знания и достаточный уровень математической культуры, то ему выставляется либо оценка «хорошо» либо оценка «отлично».

Если наряду с перечисленным выше студент умеет самостоятельно доказывать математические теоремы на основе глубоких знаний и математической интуиции, способен к научной дискуссии и к самостоятельной исследовательской деятельности в области математики, то ему выставляется оценка «отлично».

### **Критерии и шкала оценки решения задач теста:**

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент основные базовые задачи разделов курса.

Оценка «хорошо» ставится, если студент верно решает все или почти все базовые задачи.

Оценка «отлично» ставится, если решает все базовые задачи курса, приступает и достигает продвижения в решении задач повышенной сложности.

### **Критерии и шкала итоговой оценки на экзамене.**

В качестве итоговой оценки берется результат округления среднего значения следующих двух показателей: оценка ответа на первый экзаменационный вопрос, оценка за решение задач теста.

Предусмотрено несколько контрольных работ, каждая из которых включает одну или несколько задач, оцениваемых с учетом приведенного выше критерия.

## **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

1. Астахова И. В. Геометрия и топология. Учебно-методический комплекс 4-е изд., испр. и доп. - М.: Евразийский открытый институт, 2011.

<http://www.biblioclub.ru/book/90953/>

2. Мищенко А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии - М.: Физматлит, 2004.

<http://www.biblioclub.ru/book/69322/>

Шаров Г. С. Сборник задач по дифференциальной геометрии - М.: МЦНМО, 2005.

<http://www.biblioclub.ru/book/63244/>

4. Розендорн Э. Р. Задачи по дифференциальной геометрии - М.: Физматлит, 2008.

<http://www.biblioclub.ru/book/68376/>

### **б) Дополнительная литература.**

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.- 10 изд., испр. – М.: Наука, 1990. - 624 с. - 194 экземпляра.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

---

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет»

<https://uni.ivanovo.ac.ru>

Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru);

<http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/ebs-universitetskaya-biblioteka>

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/elibnew>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser.

(

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;

- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование: доска, проектор для презентаций.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

---

**Автор(ы) рабочей программы дисциплины:** кандидат физико-математических наук  
Власов Евгений Викторович

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры фундаментальной математики  
«\_1\_» сентября 2023 г., протокол № 1

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_ И.О. Фамилия  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_ И.О. Фамилия  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_ И.О. Фамилия  
(подпись)