



Основная профессиональная образовательная программа
01.03.01 Математика
(Математика)


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра фундаментальной математики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

 Е.В.Ерёмина
(подпись)

«_1_»__сентября_____2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Дополнительные главы функционального анализа

Уровень высшего образования:	бакалавриат
Квалификация выпускника:	бакалавр
Направление подготовки:	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математика

Иваново



1. Цели освоения дисциплины

Программа предусматривает изложение основных понятий и принципов функционального анализа в объеме традиционного вводного курса, что соответствует требованиям к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы по специальности. Предварительно излагаются основные понятия топологических, метрических, нормированных и гильбертовых пространств, теории интеграла Лебега и пространства суммируемых функций. Линейные операторы появляются уже здесь. Затем естественным образом осуществляется переход к изучению основных понятий теории линейных ограниченных операторов, теории компактных операторов, излагается теорема Фредгольма. Интегральные уравнения встречаются уже в начале курса, сразу после изучения принципа сжимающих отображений. Изучение линейных интегральных уравнений возобновляется после доказательства теоремы Фредгольма.

Для понимания и успешного усвоения курса достаточно, чтобы студент владел основными понятиями математического анализа, топологии и линейной алгебры.

2. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина по выбору (индекс Б1.В.ДВ.01.01).

Для понимания и успешного усвоения курса достаточно, чтобы студент владел основными понятиями теории множеств, математического анализа, функционального анализа, теории функций комплексного переменного и алгебры.

Для освоения данной дисциплины обучающийся должен:

Знать: Основные понятия теории множеств, математического анализа, топологии и линейной алгебры.

Уметь: Пользоваться основными понятиями теории множеств, математического анализа, топологии и линейной алгебры.

Иметь навыки: Основными понятиями теории множеств, математического анализа, топологии и линейной алгебры.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина (согласно матрице соответствия компетенций и составляющих ОП)

При освоении дисциплины формируются следующие компетенции в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

- а) общекультурные (ОК):
- б) общепрофессиональные (ОПК):
- в) профессиональные (ПК):



Основная профессиональная образовательная программа
01.03.01 Математика
(Математика)

ПК-1. Способен применять в научно-исследовательской деятельности знания в области фундаментальной, прикладной математики и (или) основ информационных технологий.

г) дополнительные (ПКВ):

3.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с формируемыми компетенциями

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать: введенные в курсе понятия и соответствующие теоремы (ПК-1).

Уметь: применять доказанные теоремы и изученные методы к решению задач (ПК-1).

Иметь навыки пользования: методами, изложенными в курсе (ПК-1).

4. Объем и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 8 зачетных единиц (288 академических часов).

4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.

№ п/ п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения) Формы промежуточной аттестации
			Занятия лекцион -ного типа	Занятия семинар -ского типа	
1	Элементы теории множеств	5	3	3	Ответ на практическом занятии
2	Метрические и топологические пространства	5	9	9	Ответ на практическом занятии
3	Линейные топологические и нормированные пространства	5	6	4	Контрольная работа
4	Линейные ограниченные операторы и функционалы	5	8	6	Ответ на практическом занятии
5	Мера и интеграл Лебега	5	6	6	Ответ на практическом занятии
6	Пространства суммируемых функций	5	4	4	Контрольная работа
Итого за семестр:			36	32	Зачет с оценкой
7	Сопряженное пространство. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр оператора	6	6	6	Ответ на практическом занятии



Основная профессиональная образовательная программа
01.03.01 Математика
(Математика)

8	Гильбертовы пространства. Сопряженные операторы	6	6	5	Контрольная работа
9	Теорема Хана-Банаха	6	4	1	Ответ на практическом занятии
10	Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабая сходимость	6	6	6	Ответ на практическом занятии
11	Компактные операторы. Спектр компактного оператора. Теорема Фредгольма	6	8	6	Контрольная работа
12	Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта. Линейные интегральные уравнения	6	4	6	Ответ на практическом занятии
Итого за семестр:			34	30	Экзамен
Итого по дисциплине:			70	62	

4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

Раздел 1. Элементы теории множеств

Тема 1. Операции над множествами. Понятие функции

Общее понятие функции. Образ множества. Прообраз множества. Последовательности. Семейство. Операции над множествами. Соотношения двойственности.

Тема 2. Понятие мощности. Счетные множества и множества мощности континуума

Равномощные множества. Конечные и бесконечные множества. Примеры и свойства счетных множеств. Понятие мощности. Сравнение мощностей. Теорема Шредера-Бернштейна. Операции над кардинальными числами. Отсутствие наибольшей мощности. Множества мощности континуума.

Раздел 2. Метрические и топологические пространства

Тема 3. Основные понятия метрических и топологических пространств. Непрерывные отображения.

Определение и примеры метрических пространств. Открытые и замкнутые множества. Топологические пространства. Внутренность. Граница. Замыкание. Предельные точки и точки прикосновения. Сходимость. Непрерывные отображения. Непрерывность метрики. Гомеоморфизм.

Тема 4. Сепарабельность. Полнота.

Сепарабельные пространства. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств. Фундаментальные последовательности. Полные пространства. Примеры полных и неполных пространств. Пополнение метрического пространства.



Тема 5. Множества первой и второй категории. Нигде не плотные множества. Множества первой и второй категории. Свойства множества первой и второй категории. Теорема Бэра.

Тема 6. Компактность. Ограниченные и вполне ограниченные множества. Компактные множества. Критерий компактности. Непрерывные функции на компактных пространствах. Равномерная непрерывность. Теорема Арцела-Асколи.

Тема 7. Принцип сжимающих отображений.

Принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям Фредгольма. Обобщенный принцип сжимающих отображений и его применение к интегральным уравнениям Вольтера.

Раздел 3. Линейные топологические и нормированные пространства

Тема 8. Линейные операторы и функционалы.

Линейные пространства. Линейные операторы и функционалы. Ядро и образ линейного оператора.

Тема 9. Нормированные и линейные топологические пространства.

Линейные топологические пространства. Изоморфизм. Подпространство. Линейное нормированное пространство. Линейная изометрия. Примеры нормированных пространств. Прямое произведение нормированных пространств. Фактор-пространство. Ряды в нормированном пространстве.

Раздел 4. Линейные ограниченные операторы и функционалы

Тема 10. Линейные ограниченные операторы.

Линейные ограниченные операторы и функционалы. Норма линейного ограниченного оператора.

Тема 11. Эквивалентные нормы.

Изоморфизм нормированных пространств. Эквивалентные нормы. Пополнение нормированного пространства. Эквивалентность норм в конечномерном нормированном пространстве. Конечномерные подпространства. Некомпактность единичного шара в бесконечномерном нормированном пространстве.

Раздел 5. Мера и интеграл Лебега

Тема 12. Мера Лебега.

Алгебра и σ -алгебра множеств. Борелевские множества. Функции множеств. Аддитивная и счетно-аддитивная функция множеств. Мера. Промежутки. Элементарные множества и их мера. Внешняя мера. Множества меры нуль. Измеримые множества. Единственность продолжения меры. Пространства с мерой.

Тема 13. Интеграл Лебега.

Измеримые функции и операции над ними. Интеграл Лебега. Теоремы Б. Леви и П. Фату. Теорема Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла. Счетная аддитивность



интеграла Лебега. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега. равенство интегралов Римана и Лебега. Приближение интегрируемых функций непрерывными. Интегрирование комплексных функций. Теорема Фубини.

Раздел 6. Пространства суммируемых функций

Тема 14. Банаховы пространства суммируемых в степени p функций.

Определение пространств суммируемых в степени p функций. Сепарабельность (при $p < \infty$) и несепарабельность (при $p = \infty$).

Раздел 7. Сопряженное пространство. Теорема Банаха об обратном операторе. Спектр оператора

Тема 15. Пространство линейных ограниченных операторов. Сопряженное пространство.

Определение пространства линейных ограниченных операторов. Условие его полноты. Определение сопряженного пространства и его полнота. Примеры.

Тема 16. Теоремы о существовании обратных операторов. Теорема Банаха об обратном операторе.

Доказательство теорем о существовании обратных операторов. Теорема Банаха об обратном операторе.

Тема 17. Спектр оператора. Резольвента.

Определение регулярных точек и собственных значений. Спектр оператора. Резольвента. Примеры.

Раздел 8. Гильбертовы пространства. Сопряженные операторы

Тема 18. Евклидовы и гильбертовы пространства.

Определение евклидовых и гильбертовых пространств. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского. Непрерывность скалярного произведения. Изоморфизм евклидовых пространств. Примеры.

Тема 19. Теорема об ортогональном разложении. Сопряженные операторы.

Ортогональное дополнение и его свойства. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала. Сопряженные операторы.

Тема 20. Ортогональные системы.

Определение ортогональных систем. Неравенство Бесселя. Полные системы. Ортогонализация Шмидта. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Раздел 9. Теорема Хана-Банаха

Тема 21. Продолжение линейных операторов.



Основная профессиональная образовательная программа
01.03.01 Математика
(Математика)

Продолжение линейного ограниченного оператора по непрерывности. Теорема Хана-Банаха и ее следствия.

Раздел 10. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабая сходимоть

Тема 22. Принцип равномерной ограниченности.

Теорема Банаха-Штейнгауза и ее следствия. Теорема об естественном вложении пространства во второе сопряженное. Рефлексивные пространства.

Тема 23. Слабая сходимоть.

Ограниченность слабо сходящейся последовательности. Слабая сходимоть в гильбертовом пространстве.

Раздел 11. Компактные операторы. Спектр компактного оператора. Теорема Фредгольма

Тема 24. Компактные операторы. Спектр компактного оператора. Теорема Фредгольма.

Определение и свойства компактных операторов. Спектр компактного оператора. Альтернатива Фредгольма. Компактные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Фредгольма.

Раздел 12. Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта. Линейные интегральные уравнения

Тема 25. Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта.

Определение и свойства самосопряженных операторов. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.

Тема 26. Линейные интегральные уравнения.

Линейные интегральные операторы. Линейные интегральные уравнения.

5. Образовательные технологии

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине: технологии смешанного обучения.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа студентов состоит в решении задач.

Полностью весь методический материал по обеспечению самостоятельной работы студентов приводится в Приложении 1 к РП.

7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Оценочные средства для проведения текущего контроля: Ответ на практическом занятии.



Основная профессиональная образовательная программа
01.03.01 Математика
(Математика)

Оценивание промежуточных и окончательных результатов освоения дисциплины: контрольные работы. Зачет с оценкой. Экзамен.

Форма проведения зачета: устная.

Критерий оценки: *«отлично»*.

Оценка *«отлично»* выставляется студенту, если продемонстрировано знание понятий и теорем курса и умение творчески применять их к решению задач.

Критерий оценки: *«хорошо»*.

Оценка *«хорошо»* выставляется студенту, если продемонстрировано знание основных понятий и теорем курса и умение применять их к решению простых задач.

Критерий оценки: *«удовлетворительно»*.

Оценка *«удовлетворительно»* выставляется студенту, если продемонстрировано незнание некоторых основных понятий и теорем курса.

Критерий оценки: *«неудовлетворительно»*.

Оценка *«неудовлетворительно»* выставляется студенту, если продемонстрировано незнание понятий и теорем курса и неумение решать даже простые задачи.

Форма проведения экзамена: устная.

Критерий оценки: *«отлично»*.

Оценка *«отлично»* выставляется студенту, если продемонстрировано знание понятий и теорем курса и умение творчески применять их к решению задач.

Критерий оценки: *«хорошо»*.

Оценка *«хорошо»* выставляется студенту, если продемонстрировано знание основных понятий и теорем курса и умение применять их к решению простых задач.

Критерий оценки: *«удовлетворительно»*.

Оценка *«удовлетворительно»* выставляется студенту, если продемонстрировано незнание некоторых основных понятий и теорем курса.

Критерий оценки: *«неудовлетворительно»*.

Оценка *«неудовлетворительно»* выставляется студенту, если продемонстрировано незнание понятий и теорем курса и неумение решать даже простые задачи.

Типовые варианты вопросов представлены в фонде оценочных средств (Приложение 2).

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература:



Основная профессиональная образовательная программа
01.03.01 Математика
(Математика)

1. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
2. Люстерник Л. А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
3. Люстерник Л. А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1968.
6. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболев Т.С.. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.
7. Методические указания к курсу функционального анализа. Элементы теории множеств. Иваново, 1982.
8. Методические указания к курсу функционального анализа. Метрические и топологические пространства. Иваново, 1983.
9. Методические указания к курсу функционального анализа. Нормированные пространства. Линейные операторы. Иваново, 1985.
10. Теляковский С.А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1980.
11. Белов А.С. Методические указания к курсу функционального анализа. Мера и интеграл Лебега. Иваново, 1981-1982.

Дополнительная литература:

12. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
13. Канторович Л.В., Акилов Т.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1981.
14. Наймарк И.А. Нормированные кольца. М.: Наука, 1969. (Глава 1).
15. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
16. Иосида М. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
17. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

Интернет-ресурсы:

В локальной сети ИвГУ, по адресу **<http://10.1.1.39/>**
доступны электронные варианты учебников и учебных пособий.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет»
<https://uni.ivanovo.ac.ru>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» www.biblioclub.ru;
<http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/ebs-universitetskaya-biblioteka>
Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/elibnew>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>



Основная профессиональная образовательная программа
01.03.01 Математика
(Математика)

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser.

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;
- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;
- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, выполнения курсовых работ (проектов) с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование и учебно-наглядные пособия для занятий лекционного типа, обеспечивающие тематические иллюстрации:



Основная профессиональная образовательная программа
01.03.01 Математика
(Математика)

Автор(ы) рабочей программы дисциплины: Белов А.С., профессор, доцент, д.ф.-м.н.

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры фундаментальной математики
«_31_» __августа_____ 2021 г., протокол № __1__

Программа обновлена
протокол заседания кафедры № __1__ от «_1_» _сентября_____ 2023_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП _  Еремина Е.В.
(подпись)

Программа обновлена
протокол заседания кафедры № _____ от «_____» _____ 20__ г.

Согласовано:

Руководитель ОП _____ Еремина Е.В.
(подпись)

Программа обновлена
протокол заседания кафедры № _____ от «_____» _____ 20__ г.

Согласовано:

Руководитель ОП _____ Еремина Е.В.
(подпись)