



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра алгебры и математической логики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

 П.Г. Кононенко  
(подпись)

« 19 » июня 20 19 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Математическая логика и теория алгоритмов**

Уровень высшего образования:	бакалавриат
Квалификация выпускника:	бакалавр
Направление подготовки:	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математика

Иваново



## 1. Цели освоения дисциплины

ОП имеет своей целью подготовку бакалавров для научно-исследовательской и педагогической деятельности в сферах научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок, дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования путем формирования у студентов компетенций, позволяющих использовать математические методы для решения различных задач моделирования процессов, объектов и программного обеспечения; для разработки эффективных методов решения задач экономики и управления; для программно-информационного обеспечения научной, педагогической и исследовательской деятельности. Выпускник способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении; проводить работы по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований; использовать в педагогической деятельности научные знания в сфере математики и информатики; преподавать математику и информатику по программам основного и среднего общего образования.

Цели и задачи данной дисциплины определяются целями ОП и той ролью, которую играет математическая логика в современной математике и информатике. Во-первых, математическая логика – наука, лежащая в основаниях математики, и формальный язык математики. Во-вторых, быстрое развитие вычислительной техники способствует расширению как круга задач, решаемых с помощью математической логики, так и методов, применяемых для их решения. Это в первую очередь относится к задачам искусственного интеллекта, решение которых немислимо без привлечения методов математической логики. Сказанное в полной мере относится и к теории алгоритмов, тесно связанной с математической логикой.

В число основных задач курса следует включить:

1. Знакомство с основными методами логических рассуждений - дедукцией, индукцией, аналогией. Рассмотрение методов решения задач логического характера.
2. Овладение формальным языком математической логики для формулирования математических утверждений.
3. Изучение классических логических исчислений - исчисления высказываний и исчисления предикатов.
4. Изучение основных свойств аксиоматических теорий и ознакомление с методами формальных доказательств в рамках этих теорий.
5. Изучение машин Тьюринга.
6. Введение в теорию линейно-ограниченных автоматов.
7. Введение в теорию рекурсивных функций.

Знакомство с основными понятиями теории вычислимости

## 2. Место дисциплины в структуре ОП

Учебная дисциплина «Математическая логика и теория алгоритмов» включена в обязательную часть учебного плана (Б1.О.17). Она изучается студентами на втором курсе в 3 и 4-ом семестрах. Для ее успешного изучения необходимы «входные» знания и умения, полученные в процессе изучения дисциплин:

- алгебра и геометрия;
- дискретная математика;
- математический анализ;
- практикум по элементарной математике.

Для освоения данной дисциплины обучающийся должен:

Знать: основные понятия элементарной математики, алгебры, математического анализа и дискретной математики

Уметь: выполнять действия над числами, алгебраическими выражениями и функциями.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)

Иметь навыки: использования теоретико-множественной терминологии и общематематических методов доказательств теорем.

Список учебных дисциплин (модулей), изучение которых опирается на материал курса «Математическая логика и теория алгоритмов»:

- математические методы в естествознании;
- математическое моделирование;
- история, основания и методология математики;
- методика преподавания математики и информатики;
- учебная практика, практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков в научно-исследовательской деятельности;
- производственная практика, научно-исследовательская работа;
- производственная практика, педагогическая практика;
- производственная практика, преддипломная практика;
- подготовка и сдача государственного экзамена;
- подготовка к защите и защита выпускной квалификационной работы (бакалаврской работы).

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

#### **3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина**

При освоении дисциплины формируются следующие компетенции в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

- а) универсальные (УК): нет
- б) общепрофессиональные (ОПК):

ОПК-1: Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности

Код и наименование индикатора достижения компетенции:

ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.

ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.

ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

- в) профессиональные (ПК): нет

#### **3.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения формируемых компетенций**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

основные понятия: высказывание, логические связки, формулы, предикаты, операции навешивания кванторов, исчисления, модели, алгоритмы, машины Тьюринга, рекурсивные функции и классические результаты математической логики и теории алгоритмов: полнота или неполнота аксиоматической теории, разрешимость или неразрешимость алгоритмической проблемы, формализация понятия алгоритма (ОПК-1.1), современные направления и проблематику тех разделов математической логики и теории алгоритмов, которые входят в сферу будущей профессиональной деятельности студента: теория конечных автоматов, теория моделей, теория вычислимости (эти знания лежат в основе всех перечисленных выше компетенций) (ОПК-1.3);

Уметь: воспроизводить и творчески перерабатывать доказательства классических теорем математической логики (ОПК-1.2), корректно формулировать естественнонаучные задачи на



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)

языке математической логики, доказывать или опровергать математические гипотезы (ОПК-1.1), развивать свою математическую интуицию на основе глубоких знаний современной алгебры и математической логики, реализовывать свои идеи в виде научных результатов и увидеть следствия полученного результата (ОПК-1.2).

Владеть: навыками работы с теориями первого порядка (ОПК-1.1), навыками использования методов математической логики и теории алгоритмов к конкретной предметной области (ОПК-1.2), навыками перехода от интуитивных научных идей к их четкому и ясному изложению в надлежащем виде (ОПК-1.1), технологиями поиска информации с помощью сетевых ресурсов (ОПК-1.3).

#### 4. Объем и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 9 зачетных единиц (324 академических часов)

##### 4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.

№ п/п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)  Формы промежуточной аттестации
			Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа (практ. зан.)	
1.	Вводный. Введение в проблематику дисциплины, представление рабочей программы, осмысление требований к организации процесса обучения, самостоятельной работы и форм аттестации	3	2	2	Входная диагностика: тест с последующим обсуждением результатов. Список вопросов, интересующих студента по содержанию дисциплины (сдается в письменном виде)
2.	Алгебра высказываний	3	4	4	Контрольная работа №1 «Алгебра высказываний»
3.	Исчисление высказываний	3	8	8	
4.	Релейно-контактные схемы	3	2	2	
5.	Булева алгебра высказываний	3	6	6	
6.	Алгебра предикатов	3	4	4	Контрольная работа №2 «Алгебра предикатов»
7.	Элементы теории моделей	3	4	4	
8.	Интерпретация формул алгебры предикатов	3	6	6	
Итого за семестр:			36	32	Зачет с оценкой
9.	Основы теории алгоритмов	4	8	8	Контрольная работа №3 «Машины Тьюринга и рекурсивные функции»
10.	Теория рекурсивных функций	4	8	8	
11.	Вычислимые и вычислимо перечислимые множества	4	8	8	Контрольная работа №4 «Теория вычислимости»
12.	Сводимости: по Тьюрингу и по перечислимости	4	10	6	



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)

Итого за семестр:	34	30	Экзамен
Итого по дисциплине:	70	62	

## 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

### 3 семестр

#### 1. Вводный раздел.

Введение в проблематику дисциплины, представление рабочей программы, осмысление требований к организации процесса обучения, самостоятельной работы и форм аттестации

#### 2. Алгебра высказываний.

Понятие высказывания и высказывательной формы (предиката). Операции над высказываниями. Понятие формулы алгебры высказываний. Отношение эквивалентности на множестве формул алгебры высказываний. Нормальные формы. Алгоритм построения СКН-форм и СДН-форм по таблице истинности формулы алгебры высказываний.

#### 3. Исчисление высказываний.

Понятие исчисления. Исчисление высказываний (ИВ). Формализованный язык ИВ. Формулы ИВ. Аксиомы и правила вывода ИВ. Теорема дедукции. Полнота ИВ. Дедуктивная полнота ИВ.

Интуиционистская логика. Пример «чистого существования» и интуиционистского доказательства. Закон исключенного третьего в интуиционистской логике. Закон снятия двойного отрицания в интуиционистской логике. Аксиомы интуиционистского исчисления высказываний. Интуиционистские логические операции. Правила вывода в интуиционистской логике. Связь между классической и интуиционистской логиками.

#### 4. Приложение алгебры высказываний: релейно-контактные схемы.

Релейно-контактные схемы. Реализация формул алгебры логики с помощью релейно-контактных схем.

#### 5. Булева алгебра высказываний

Определение булевой алгебры. Приложения булевой алгебры к алгебре высказываний. Операции над высказываниями (логические сложение и умножение, инверсия). Полные системы логических функций.

Понятие минтерма. Свойства минтермов. Определение СДНФ булевых функций. Теорема о СДНФ. Табличный способ нахождения СДНФ и СКНФ.

Карты Вейча. Нанесение функций на карту Вейча. Нахождение СДНФ при помощи карт Вейча. Определение равенства двух булевых функций с помощью карт Вейча. Построение инверсии булевой функции с помощью карт Вейча. Построение конъюнкции и дизъюнкции двух функций с помощью карт Вейча.

#### 6. Алгебра предикатов.

Понятие языка алгебры предикатов. Определение операций навешивания кванторов. Понятие свободных и связанных переменных. Понятие формулы алгебры предикатов. Основные эквивалентности формул алгебры предикатов.

Предваренные нормальные формы. Алгоритм построения ПН-форм. Определение предваренной нормальной формы формулы алгебры предикатов. Скулемовская нормальная форма формулы алгебры предикатов. Проблема разрешения для алгебры предикатов. Теорема Черча.



## **7. Элементы теории моделей**

Понятие модели. Определение формулы модели данной сигнатуры. Определения выполнимой, истинной и ложной формулы на данной модели. Понятие значения формулы алгебры предикатов на модели. Важные примеры.

Понятия выполнимой на модели формулы алгебры предикатов, выполнимой формулы алгебры предикатов, ложной на модели формулы алгебры предикатов, невыполнимой формулы алгебры предикатов, тождественно истинной на модели формулы алгебры предикатов, общезначимой формулы алгебры предикатов.

## **8. Интерпретации формул алгебры предикатов**

Определение интерпретации формул алгебры предикатов. Значение формулы при данной интерпретации. Классификация формул алгебры предикатов. Понятие равносильных формул. Определение логического следования для формул алгебры предикатов. Критерий логического следования. Теорема о дедукции. Правила логического вывода.

## **4 семестр**

## **9. Основы теории алгоритмов**

Понятие алгоритма. Неформальное определение алгоритма. Основные свойства алгоритмов. Роль алгоритмов в информатике. Алгоритмические проблемы. Проблема разрешимости. Обзор алгоритмически неразрешимых проблем: 10-я проблема Гильберта, проблема равенства в теории полугрупп.

Машины Тьюринга: определение, вычисления на машинах Тьюринга. Понятие вычислимости и вычислительные процедуры. Алгоритмически вычислимые функции. Тезис Черча-Тьюринга. Проблема остановки как одна из первых алгоритмически неразрешимых проблем.

## **10. Теория рекурсивных функций**

Основные вычислимые операторы: суперпозиция, примитивная рекурсия и минимизация ( $\mu$ -оператор). Начальные функции. Примитивно-рекурсивные функции (ПРФ): определение, свойства, примеры.

Частично-рекурсивные функции (ЧРФ): определение, свойства, примеры. Тезис Черча. Общерекурсивные функции (ОРФ). Соотношения между классами ПРФ, ОРФ и ЧРФ.

Гёделева нумерация частично-рекурсивных функций. Универсальность,  $s$ - $m$ - $n$ -теорема. Неразрешимые проблемы. Проблема остановки для частично вычислимых функций.

## **11. Вычислимые и вычислимо перечислимые множества**

Определение вычислимо перечислимых и вычислимых множеств. Основные свойства в.п. и в. множеств. Основная теорема о вычислимо перечислимых множествах. Следствия основной теоремы. Гёделева нумерация вычислимо перечислимых множеств.

Вычислимые и вычислимо перечислимые отношения и предикаты. Кодирование  $n$ -ок. Теоремы о проекциях.

## **12. Сводимости**

Понятие алгоритмической сводимости. Понятие степени неразрешимости относительно сводимости.  $1$ -сводимость и  $m$ -сводимость множеств: основные определения и простейшие свойства.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)

Машина Тьюринга с оракулом. Расширенная формализация относительной вычислимости. Релятивизованная теория вычислимых и вычислимо перечислимых множеств.

Сводимость по Тьюрингу: основные определения и простейшие свойства. Операция скачка. Некоторые важные множества и степени.

Арифметическая иерархия множеств. Нормальные формы. Алгоритм Тарского – Куратовского.

Сводимость по перечислимости: основные определения и свойства.

## 5. Образовательные технологии

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине: технологии смешанного обучения; презентационная графика.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Предполагается выдача студентам (в текстовой или электронной форме) методических материалов (см. приложение 1), конспектов некоторых лекций, вариантов домашних заданий (Приложение 3).

Методические материалы по данному курсу, изданные в виде учебников и монографий, находятся в библиотечных фондах ИвГУ.

Доступ к методическим материалам через ЭИОС «Мой университет»

## 7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

**Входной контроль:** тест. Типовые варианты тестовой работы представлены в фонде оценочных средств (Приложение 2)

**Цель:** выяснение уровня знаний студентов по дискретной и элементарной математике. Критерий оценки: «зачтено», «не зачтено».

**Промежуточный контроль:** задания для домашних работ разного характера, контрольные работы и реферат. Типовые варианты контрольных работ представлены в фонде оценочных средств (Приложение 2). Критерий оценки: 100-бальная

**Цель:** текущий контроль освоения студентами данной дисциплины.

**Итоговый контроль:** зачет с оценкой и экзамен. Типовые варианты экзаменационных билетов представлены в фонде оценочных средств (Приложение 2). Критерий оценки: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

**Цель:** подведение итогов освоения студентами данной дисциплины.

**Форма проведения зачета и экзамена:** письменная с учетом накопительной оценки.

**Итоговая оценка по дисциплине:** оценка за экзамен.

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература:

1. Успенский, В.А. Вводный курс математической логики : учебное пособие / В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. - 2-е изд. - Москва : Физматлит, 2007. - 126 с. - ISBN 978-5-9221-0278-0 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75959> (11.01.2019).
2. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. - 5-е изд., исправл. - Москва : Физматлит, 2002. - 258 с. - ISBN 5-9221-0026-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75576> (11.01.2019).



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)

---

Дополнительная литература:

3. Гиндикин, С.Г. Алгебра и логика в задачах / С.Г. Гиндикин ; ред. Ю.А. Гастев, В.В. Донченко. - Москва : Наука, 1972. - 288 с. : ил. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=449478> (11.01.2019).

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanovo.ac.ru>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru);

<http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/ebs-universitetskaya-biblioteka>

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/elibnew>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser.

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;

- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, выполнения курсовых работ (проектов) с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения.

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование и учебно-наглядные пособия для занятий лекционного типа, обеспечивающие тематические иллюстрации: презентации.





Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика)



Автор рабочей программы дисциплины: декан факультета МиКН, профессор, д.ф.-м.н.  
Солон Б.Я.

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры алгебры и математической  
логики

«13» июня 2019 г., протокол № 8

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № 1 от «08» сентября 2020 г.

Согласовано:

Руководитель ОП  (подпись) 

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от « \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_  
(подпись)